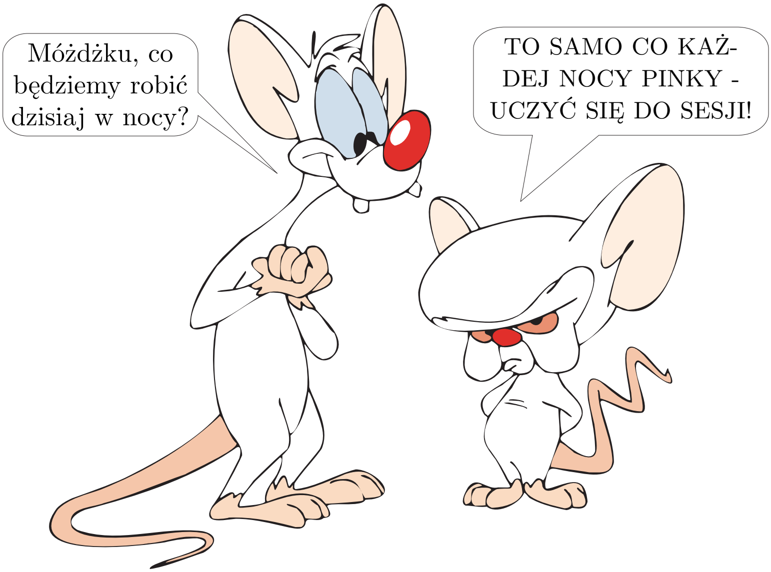
[MACI$_E$RZATOR27]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Witamy w styczniowym numerze [MACI$_E$RZATORa]!

Rozpoczyna się nowy rok kalendarzowy i wielkimi krokami nadchodzi moment, na który wszyscy czekaliśmy - moment, w którym możemy pochwalić się swoją nabytą wiedzą przed naszymi wykładowcami na kolejnych egzaminach sesji zimowej. Powodzenia na tejże i wolnego od egzaminów marca

życzy redakcja

[O samopodobieństwie trochę inaczej]

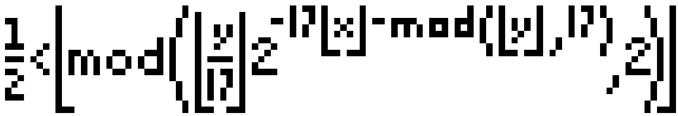
Wyobraźmy sobie taki problem: czy można napisać wzór, definiujący pewien zbiór na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, który po narysowaniu wyglądałby tak samo jak napis, który przed chwilą stworzyliśmy? Zauważmy, że jeśli w „powyższym” wzorze dodalibyśmy jakiś losowy znak, to oczywiście wszystko by się zepsuło (bo nie byłoby tam części odpowiedzialnej za „napisanie” tego nowego znaku). Taki wzór (o ile istnieje) jest bardzo czuły na wszelkie zachwiania.

A co jeśli ograniczymy się tylko to wyglądu przybliżonego? Przypuśćmy, że chcemy, aby nasz zbiór (po narysowaniu) był napisem składającym się z pikseli. Okazuje się, że taki zbiór istnieje. Jego przykład w 2001 roku podał Jeff Tupper. Wzór wygląda tak:

$$\frac{1}{2} < \left\lfloor \operatorname{mod}\left(\left\lfloor \frac{y}{17} \right\rfloor 2^{-17\lfloor x\rfloor - \operatorname{mod}(\lfloor y\rfloor, 17)}, 2 \right) \right\rfloor,$$

gdzie, oczywiście, $\operatorname{mod}(a, b)$ oznacza resztę z dzielenia a przez b, zaś $\lfloor x\rfloor$ część całkowitą liczby x.

Teraz jeśli zaznaczymy wszystkie punkty $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniające tę nierówność, to w kwadracie $[0, 106] \times [k, k + 17]$, gdzie $k = 960\,939\,379\,918$ $958\,884\,971\,672\,962\,127\,852\,754\,715\,004\,339\,660\,129\,306\,651\,505\,519\,271$ $702\,802\,395\,266\,424\,689\,642\,842\,174\,350\,718\,121\,267\,153\,782\,770\,623\,355$ $993\,237\,280\,874\,144\,307\,891\,325\,963\,941\,337\,723\,487\,857\,735\,749\,823\,926$ $629\,715\,517\,173\,716\,995\,165\,232\,890\,538\,221\,612\,403\,238\,855\,866\,184\,013$ $235\,585\,136\,048\,828\,693\,337\,902\,491\,454\,229\,288\,667\,081\,096\,184\,496\,091$ $705\,183\,454\,067\,827\,731\,551\,705\,405\,381\,627\,380\,967\,602\,565\,625\,016\,981$ $482\,083\,418\,783\,163\,849\,115\,590\,225\,610\,003\,652\,351\,370\,343\,874\,461\,848$ $378\,737\,238\,198\,224\,849\,863\,465\,033\,159\,410\,054\,974\,700\,593\,138\,339\,226$ $497\,249\,461\,751\,545\,728\,366\,702\,369\,745\,461\,014\,655\,997\,933\,798\,537\,483$ $143\,786\,841\,806\,593\,422\,227\,898\,388\,722\,980\,000\,748\,404\,719$ otrzymamy taki rysunek:



Widzimy oczywiście, że musieliśmy się w przypadku tego wzoru umówić co mamy z nim zrobić – przecież jak zazwyczaj matematyk widzi jakiś wzór, to nie zaznacza punktów na płaszczyźnie spełniających go. Troszeczkę przesadzając można by się umówić, że symbolem

$$\widehat{\emptyset \otimes^{\partial^{\hookleftarrow}_{\infty} \ll}_{\xi}}$$

będziemy oznaczać zbiór, który po narysowaniu wygląda jak ten symbol. Widzimy jednak, że takie postępowanie wywołuje w nas pewien niesmak.

Podobny problem można sformułować w przypadku pisania programów. Jak napisać program, który wyświetla na ekranie własne źródło? Program, który to realizuje jest nazywany Quine. No i znowu, po krótkim zastanowieniu stwierdzamy, że taki problem jest nietrywialny. Jednak udowodniono, że taki program istnieje w każdym języku programowania, który potrafi wyświetlać (przeliczalne) ciągi znaków na ekranie. W języku `C++` taki program wygląda następująco (program nie powinien zawierać znaków nowej linii):

```
#include <iostream>
int main(){const char c=’,’,dq=’",q[]="",
*s[]={"#include <iostream>","int main(){
const char c=’,’,dq=’",",q[]=",",*s[]={","};
std::cout<<s[0]<<std::endl<<s[1]<<dq<<s[2]<<dq
<<q<<dq<<s[3]<<dq<<s[0]<<dq<<c<<dq<<s[1]<<dq<<c
<<dq<<s[2]<<dq<<c<<dq<<s[3]<<dq<<c<<dq<<s[4]<<dq
<<s[4]<<std::endl;}"};std::cout<<s[0]<<std::endl
<<s[1]<<dq<<s[2]<<dq<<q<<dq<<s[3]<<dq<<s[0]<<dq<<c
<<dq<<s[1]<<dq<<c<<dq<<s[2]<<dq<<c<<dq<<s[3]<<dq<<c
<<dq<<s[4]<<dq<<s[4]<<std::endl;}
```

Jako ćwiczenie polecam napisanie takiego programu w języku `HQ9+`. `HQ9+` to język ezoteryczny stworzony przez Cliff’a L. Biffle’a podczas przerwy świątecznej na przełomie roku 2000 i 2001, w którym są tylko 4 komendy: `H` (powoduje wyświetlenie napisu ”Hello, World!”), `Q` (powoduje wyświetlenie kodu źródłowego programu), `9` (wyświetla na ekranie tekst piosenki *99 Bottles of Beer* [1]) oraz `+` (zwiększa wartość zapisaną w akumulatorze (pewnym rejestrze procesora)).

Język ten doczekał się nawet swojego następcy `HQ9++`.

Zauważmy, że analogicznym problemem jest np. skonstruowanie takiej maszyny, która produkowałaby swoją w pełni funkcjonalną kopię. Pomyślmy jak przyspieszyłby się rozwój astronomii, gdyby ludzie skonstruowali taką

[1] słowa piosenki: 99 bottles of beer on the wall, 99 bottles of beer. Take one down and pass it around - 98 bottles of beer on the wall.
...
2 bottles of beer on the wall, 2 bottles of beer. Take one down and pass it around - 1 bottle of beer on the wall.
1 bottle of beer on the wall, 1 bottle of beer. Take it down and pass it around - no more bottles of beer on the wall.

sondę kosmiczną, która replikowałaby się samodzielnie. Oczywiście czytelnik może pomyśleć: „Ale zaraz! Skąd ta sonda weźmie potrzebne do skonstruowania swojej kopii materiały?”. Okazuje się, że problem replikacji jest trudniejszy niż pozyskiwanie materiałów. Zauważmy, że wszystkie organizmy żywe mają taką zdolność, a nauce nie udało się jak dotąd stworzyć sztucznego życia.

Na pocieszenie warto wspomnieć o tym, że w matematyce są znane obiekty, które potrafią tworzyć swoje kopie. 2 z nich przedstawiliśmy powyżej. A gdzie jeszcze takich szukać? Np. w teorii badającej automaty komórkowe. Tam istnieje wiele struktur, które tworzą własną kopię. Ale to znowu temat na zupełnie inną opowieść. vil

---

[Πografie - Srinivasa Aiyangar Ramanujan]

1887-1920

Ludzi można, z grubsza rzecz biorąc, podzielić na dwie kategorie - tych, którzy wolą uczyć się sami, i tych, którzy wolą być prowadzeni (w ten czy inny sposób). Tych, którzy lepiej przyswajają wiedzę z książek, i tych wolących wiedzę z wykładów. Zazwyczaj na tych pierwszych, tych 'samouków', patrzy się nieco inaczej - najczęściej na zagadnienie poruszane na danym wykładzie natrafili już wcześniej, o pojęciu dopiero definiowanym już słyszeli, a typy zadań wałkowane obecnie na ćwiczeniach opanowali już kiedyś. No ale nie można się tak samouczyć w nieskończoność, nie znajdziemy przecież pięciolatka dowodzącego hipotezy Riemanna. Stąd wniosek, że w zbiorze takich samouków, uporządkowanym liniowo przez skalę ich osiągnięć, czy też zasięg ich samodzielnych badań, jesteśmy w stanie wskazać jakieś elementy aspirujące do miana największych, czy choćby maksymalnych. Myślę, że wielu ludzi zgodzi się ze mną, gdy napiszę, że jednym takim elementem jest zapewne Ramanujan.

Zadajmy sobie pytanie - co, od strony matematycznej, robiliśmy w wieku piętnastu lat? Zapewne byliśmy gdzieś pomiędzy rysowaniem wykresów funkcji kwadratowej, a obliczaniem wartości logicznej zdań. Ramanujan, po poznaniu sposobów na rozwiązywanie równań wielomianowych trzeciego stopnia (których, nawiasem mówiąc, w pełnej ogólności nie zna większość z nas), na własną rękę począł rozwiązywać równania czwartego stopnia. I zrobił to, po czym zajął się równaniami piątego stopnia (tu oczywiście nic nie zdziałał, bo, oczywiście, dla równań stopni piątego i wyższych takie metody nie istnieją). Liczy się jednak sam fakt. Ramanujan w szkole uchodził za inteligentnego i elastycznego ucznia, dobrego ze wszystkich przedmiotów. Prawdziwe zainteresowanie matematyką wzbudziła w nim dopiero książka G. S. Carra *Synopsis of elementary results in pure mathematics*. To ta książka ukształtowała sposób, w jaki potem pisał Ramanujan, i pozwoliła mu uczyć się matematyki na własną rękę. Problem w tym, że książka była z 1856 roku, więc była dosyć nieaktualna.

Od roku 1904 (zwracamy uwagę - Ramanujan miał wtedy *17 lat*) Srinivasa rozpoczął swe badania matematyczne 'na poważnie'. Badał szereg $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$, wyliczył stałą Eulera do 15 miejsc po przecinku (!!!), a nawet odkrył na własną rękę liczby Bernoulliego. Tak - wszystko to Ramanujan odkrywał sam, bez pomocy książek, podręczników czy wykładowców. To były jego własne odkrycia!

Za swoje osiągnięcia Ramanujan otrzymał stypendium, które jednak odebrano mu po roku, gdyż jego poświęcenie się matematyce powodowało, że nie uczył się pozostałych przedmiotów na Government College w Kumbakonam. Trudna sytuacja finansowa spowodowała, że musiał on przeprowadzić się do innego miasta. Kontynuował wciąż pracę matematyczną, badając relacje między całkami i szeregami. Jak dowiedział się znacznie później, wkraczał w dziedzinę funkcji eliptycznych.

W roku 1906 nie dostał się na Uniwersytet w Madras - zdał egzamin z matematyki, ale oblał ze wszystkiego innego ze względu na ciężką chorobę, na jaką wtedy zapadł. Choroba zresztą przerwała jego badania nad ułamkami łańcuchowymi i szeregami rozbieżnymi i w roku 1909 musiał poddać się operacji, po której długo dochodził do siebie. W tym też czasie jego matka zaaranżowała mu małżeństwo z dziesięcioletnią dziewczyną. Ślub odbył się 14 lipca 1909 roku. Zanim się zbulwersujecie - małżonkowie zamieszkali razem dopiero dwa lata później, kiedy dziewczyna osiągnęła już dojrzały wiek lat dwunastu.

Około roku 1910-1911 Ramanujan rozpoczął stawianie i rozwiązywanie problemów w *Journals of the Indian Mathematical Society*, gdzie jego prace zostały dostrzeżone. Szybko zdobył reputację matematycznego geniusza. Wtedy też Ramanujan poprosił jednego z członków Indyjskiego Towarzystwa Matematycznego o poradę w sprawie pracy, i dostał swoją pierwszą posadę... w biurze rachunkowym. Inny członek Towarzystwa bezskutecznie usiłował załatwić jakieś stypendium dla młodego geniusza. Ramanujan miał sporo szczęścia, bo jakkolwiek historia jego 'kariery zawodowej' brzmi jak żart (w marcu 1912 roku podjął jeszcze pracę jako urzędnik), to w jego otoczeniu przewijało się sporo matematyków - jego własny szef był matematykiem i opublikował jedną z prac Ramanujana. Inny znów matematyk, C. L. T. Griffith, zainteresowany talentem Ramanujana, doradził mu wysłanie swych prac do profesora Hilla na Uniwersytecie Londyńskim. Hill jednak odpisał, że nie do końca zrozumiał rozumowania Ramanujana dotyczące szeregów rozbieżnych i doradził mu przeczytanie książki o teorii szeregów nieskończonych. Oczywiście, taka odpowiedź nie usatysfakcjonowała ambitnego młodzieńca, który rozesłał swoje prace innym matematykom.

W styczniu 1913 roku G. H. Hardy otrzymał duży, wymięty list z masą indyjskich znaczków. W tymże liście jakiś Hindus podał listę twierdzeń, w większości szalonych i fantastycznych, w pewnej mierze po prostu błędnych, a wiele z nich - szeroko już znanych. Twierdzenia te były podane bez dowodu i wyglądały na szalbierstwo, więc Hardy na początku odłożył ten list na bok. Dopiero później razem ze swym współpracownikiem Littlewoodem przeczytał list bardziej wnikliwie i doszedł do wniosku, że fantastyka i abstrakcja niektórych z zawartych tam faktów wyklucza możliwość oszustwa - już prędzej błędu, popełnionego jednak przez kogoś obdarzonego praktycznie niespotykaną wyobraźnią i intuicją matematyczną.

Tak rozpoczęła się współpraca tej dwójki matematyków. W Hardym Ramanujan znalazł pierwszego przyjaciela, który z uznaniem patrzył na jego pracę. To również dzięki Hardy'emu Srinivasa otrzymał stypendium na uniwersytecie w Madras, a w końcu przeniósł się na uniwersytet w Cambridge. W 1914 roku Ramanujan przybył do Anglii. Ścisły wegetarianizm Ramanujana, połączony z wybuchem I wojny światowej, utrudniającej uzyskanie specyficznych artykułów żywnościowych, spowodował jednak, że niedługo po swoim przybyciu matematyk zaczął mieć problemy zdrowotne. Współpraca Hardy'ego i Ramanujana jednak kwitła, choć brak formalnego wykształcenia u tego drugiego niejednokrotnie okazywał się problemem. Littlewood został poproszony o nauczenie Hindusa ścisłych matematycznych metod dowodzenia, jednak - jak się okazało - uczenie Ramanujana było niezwykle skomplikowane, gdyż za każdym razem, gdy podawało mu się nowy fakt lub twierdzenie, ów błyskawicznie dzielił się swoimi oryginalnymi pomysłami na ten temat, czyniąc kontynuację 'lekcji' praktycznie niemożliwą. W marcu 1916 roku, pomimo niespełniania formalnych wymogów, Ramanujan uzyskał ekwiwalent dzisiejszego tytułu doktora na uniwersytecie w Cambridge. Niestety, w roku 1917 ponownie dopadła go choroba, na tyle poważna, że lekarze obawiali się, że umrze. W 1918 roku jednak pojawiły się propozycje wcielenia Ramanujana do londyńskiego *Royal Society* - propozycje wysuwane przez takie sławy jak Hardy, Littlewood, Young czy Whitehead. Zaszczyty, jakie w tym roku posypały się na głowę matematyka najwyraźniej pomogły mu nieco podźwignąć się na zdrowiu i do końca listopada Ramanujan niemalże wrócił do pełni sił i kontynuował pracę matematyczną. W roku 1919 Ramanujan powrócił do Indii, gdzie jednak jego zdrowie ponownie się pogorszyło i w ciągu roku genialny matematyk zmarł. Co ciekawe, wdowa po nim zmarła dopiero w roku 1994.

Taka jest historia życia geniusza, który, pozbawiony prowadzenia, sam badał takie zagadnienia, jak szeregi hipergeometryczne, równania funkcyjne funkcji zeta, szeregi Riemanna, czy całki eliptyczne. W roku 1918 profesor G. N. Watson rozpoczął badania zeszytów pozostawionych przez Ramanujana i, badając je aż do roku 1951, wydał 14 prac pod wspólnym tytułem "Twierdzenia Ramanujana", a także około 30 innych, zainspirowanych wynikami tegoż. Intuicja i wyobraźnia Ramanujana robi wrażenie, bo jak inaczej mógł on uzyskać wynik:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}?$$

W ciągu swego 33-letniego życia Ramanujan zanotował w swych zeszytach 3452 twierdzenia. Oznacza to, że jeśli zaczął je tworzyć w momencie narodzin (które to założenie oczywiście nie ma sensu), to i tak odkrywał dwa twierdzenia na tydzień. Bardziej realistyczne założenie, że rozpoczął pracę matematyczną w wieku lat piętnastu, daje oszałamiający wynik ponad trzech i pół twierdzenia na tydzień. Czyli około jedno twierdzenie co dwa dni. A zauważmy, że sporą część swego życia Ramanujan spędził w szpitalach, gdzie pracować nie mógł... Myślę, że to dobrze podsumowuje oszałamiające zdolności indyjskiego matematyka.

Πografia nie byłaby jednak Πografią, gdyby nie zawarła się w niej jakaś anegdota o opisywanym matematyku. Prawdopodobnie najsłynniejsza dotycząca Ramanujana brzmi tak:
Otóż gdy leżał on na szpitalnym łóżku, przyszedł do niego Hardy i z właściwym sobie taktem i swobodą nawiązywania rozmów rzekł: 'Przyjechałem tu taksówką o numerze 1729. Dość nieciekawa liczba.' 'Ależ skąd!', zaprzeczył Ramanujan. 'To najmniejsza liczba naturalna, którą da się przedstawić w postaci sumy dwóch sześcianów na dwa różne sposoby!'[2] Co ciekawe, jego wykrzyknienie dało potem asumpt dla Hardy'ego do badania tego zagadnienia i stworzenia pojęcia 'Liczby taksówkowej'. Liczbą taksówkową $Ta(n)$ nazywamy najmniejszą liczbę naturalną, którą da się przedstawić w postaci sumy dwóch sześcianów na n różnych sposobów. Oczywiście, $Ta(2) = 1729$. To znów spowodowało powstanie pojęcia 'Uogólnionej liczby taksówkowej' - $Taxicab(k, j, n)$ to najmniejsza liczba, którą da się przedstawić w postaci sumy k-tych potęg j liczb na n różnych sposobów. Dla $k = 3, j = 2$ uzyskujemy liczbę taksówkową. [3] A na dokładkę mamy jeszcze liczby *cabtaxi*,

[2] Istotnie, $1729 = 10^3 + 9^3 = 1^3 + 12^3$

[3] $Taxicab(4, 2, 2) = 635318657$ - Euler. $Taxicab(5, 2, n)$ dla $n \geqslant 2$ nie jest znane do dziś. Co ciekawe, intrygującą własność liczby 1729 wykazał w roku 1657 Frenicle de Bessy,

oznaczające najmniejszą liczbę możliwą do przedstawienia jako sumę lub różnicę dwóch sześcianów liczb całkowitych (z zerem) na dane n sposobów. Szukanie każdej z tych liczb jest, oczywiście, bardzo trudne - liczb *cabtaxi* do dziś znane jest 10 (z czego $Cabtaxi(10)$ odkryto w 2008 roku) - jednak Hardy wraz z Wrightem wykazali w 1954 roku, że liczby taksówkowe (i, co za tym idzie, liczby *cabtaxi*) istnieją dla każdego n. Co z uogólnionymi liczbami taksówkowymi, dla $k \geqslant 4$ - tego już nie wiadomo.

Zakończmy opowieść o Ramanujanie jeszcze jednym spostrzeżeniem - Hardy jest znany ze stwierdzenia, że gdyby 'Talenty matematyczne oceniać w skali od 1 do 100, samemu sobie dałby on 25, Littlewoodowi 30, Hilbertowi 80, a Ramanujanowi 100'. Takie docenienie z ust tak wybitnego matematyka musi coś znaczyć.

Niewinny Rosomak

[Co nas czeka, czyli z życia matematyków]

Kiedy francuski matematyk, twórca znakomitego podręcznika Charles Bossut dowiedział się, że jego znakomity starszy kolega Pierre-Louis Maupertuis jest ciężko chory, czym prędzej udał się doń z wizytą.

- Pacjent jest umierający - powiedział mu lekarz. - Nie jest już w stanie powiedzieć nawet słowa...

- To niemożliwe. Wiem co zrobić, żeby się odezwał - stwierdził Bossut i podszedłszy do łóżka, głośno zapytał Maupertuisa:

- Ile jest dwanaście do kwadratu?

- Sto czterdzieści cztery! - odpowiedział umierający i wydał ostatnie tchnienie.

[Stopka redakcyjna]

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie: macierzator@knm.katowice.pl

styczeń 2010

co rodzi podejrzenie, że być może Ramanujan po prostu znał lub badał już wcześniej to zagadnienie, a nie wyliczył to w ułamku sekundy - jak zazwyczaj jest to interpretowane przez podających powyższą anegdotkę.