[MACIERZATOR47]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Witamy w majowym numerze [MACIERZATORa]!

Tym razem pierwsza strona nietradycyjna – zaproszeniowa! Serdecznie zapraszamy wszystkich (studentów, wykładowców, uczniów) na XXXII wyjazdowa sesje naukowa KNM UŚ, która odbędzie się tradycyjnie w Szczyrku, w dniach 1–3 czerwca 2012. Tematem przewodnim wyjazdu są *Algorytmy*. Zgłoszenia przyjmujemy do 25 maja 2012 (na adres `knm@knm.katowice.pl`). Więcej informacji w tym listę proponowanych tematów referatów) można znaleźć na stronie Koła – `www.knm.katowice.pl`.

Miłej lektury najnowszego numeru Macierzatora życzy redakcja

ISSN 2083-9774

[Przykład Dieudonné'a równania różniczkowego bez rozwiązania]

Motywacją do napisania tego artykułu było dla nas pytanie o prawdziwość odpowiednika twierdzenia Peana (dla równań różniczkowych zwyczajnych) w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha.

Rozważamy rzeczywistą przestrzeń Banacha

$$\mathrm{c}_0 = \left\{ x \mid x = (x_1, x_2, x_3, \dots),\ x_n \in \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\},$$

gdzie norma wyraża się wzorem $\|x\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ (więcej o przestrzeni c_0 można znaleźć np. w [3]). Niech $f\colon \mathrm{c}_0 \to \mathrm{c}_0$ będzie funkcją określoną następująco:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(1 + \sqrt{|x_1|},\ \frac{1}{2} + \sqrt{|x_2|},\ \frac{1}{3} + \sqrt{|x_3|},\ \dots \right). \tag{1}$$

Z nierówności $\left| \sqrt{|\xi|} - \sqrt{|\eta|} \right| \leqslant \sqrt{|\xi - \eta|}$, prawdziwej dla $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, otrzymujemy w łatwy sposób

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|^{1/2} \quad (x, y \in \mathrm{c}_0),$$

co pokazuje, że f jest funkcją ciągłą. Dieudonné w 1950 roku pokazał, że zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \\ u(0) = (0, 0, 0, \dots) \end{cases} \tag{2}$$

nie ma rozwiązania. Później, w 1970 roku, Yorke zauważył, że równanie różniczkowe w zagadnieniu początkowym (2) w ogóle nie ma rozwiązania $u\colon [\tau, T] \to \mathrm{c}_0$ (dla żadnych τ, $T \in \mathbb{R}$, $\tau < T$). W niniejszym artykule podamy elementarny dowód tego faktu, korzystający jedynie z podstawowych wiadomości z analizy matematycznej.

Lemat 1. *Załóżmy, że α, τ, θ, $T \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\tau < \theta < T$. Dalej, niech $u\colon [\tau, T] \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem równania różniczkowego*

$$u'(t) = \alpha + \sqrt{|u(t)|} \quad (\tau \leqslant t \leqslant T).$$

Wówczas zachodzą implikacje

$$u(\theta) \leqslant 0 \Rightarrow -u(\tau) \geqslant \frac{1}{4}(\theta - \tau)^2$$

oraz

$$u(\theta) > 0 \Rightarrow u(T) \geqslant \frac{1}{4}(T - \theta)^2.$$

Dowód. Skoro $u'(t) \geq \alpha > 0$, to $u\colon [\tau, T] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą. Z równania

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \alpha + \sqrt{|u|}$$

dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\alpha + \sqrt{|u|}} = \mathrm{d}t,$$

a zatem (dla $\tau \leqslant t_1 < t_2 \leq T$)

$$\int\limits_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{|\xi|}} \geq \int\limits_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\alpha + \sqrt{|\xi|}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = t_2 - t_1.$$

Jeżeli $u(\theta) \leqslant 0$, to $u(t) < 0$ dla $\tau \leqslant t < \theta$, zatem prawdziwe są nierówności:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{u(\tau)}^{u(\theta)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{-\xi}} &\geqslant \theta - \tau, \\
-2\sqrt{-\xi}\Big|_{\xi=u(\tau)}^{u(\theta)} &\geqslant \theta - \tau, \\
\sqrt{-u(\tau)} - \sqrt{-u(\theta)} &\geqslant \frac{\theta - \tau}{2}, \\
\sqrt{-u(\tau)} &\geqslant \frac{\theta - \tau}{2}, \\
-u(\tau) &\geqslant \frac{1}{4}\left(\theta - \tau\right)^2.
\end{aligned}$$

Jeżeli $u(\theta) > 0$, to $u(t) > 0$ dla $\theta \leqslant t \leqslant T$, więc zachodzi:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{u(\theta)}^{u(T)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi}} &\geqslant T - \theta, \\
2\sqrt{\xi}\Big|_{\xi=u(\theta)}^{u(T)} &\geqslant T - \theta, \\
\sqrt{u(T)} - \sqrt{u(\theta)} &\geqslant \frac{T - \theta}{2}, \\
\sqrt{u(T)} &\geqslant \frac{T - \theta}{2}, \\
u(T) &\geqslant \frac{1}{4}(T - \theta)^2,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że* τ, $T \in \mathbb{R}$, $\tau < T$. *Dalej, niech funkcja* $f\colon \mathrm{c}_0 \to \mathrm{c}_0$ *będzie dana wzorem* (1). *Wówczas równanie różniczkowe* $u' = f(u)$ *nie ma żadnego rozwiązania* $u\colon [\tau, T] \to \mathrm{c}_0$.

Dowód. Załóżmy, że $u' = f(u)$ ma rozwiązanie $u\colon [\tau, T] \to \mathrm{c}_0$. Niech

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), \ldots) \in \mathrm{c}_0 \quad (\tau \leqslant t \leqslant T).$$

Otrzymujemy $u_n'(t) = \frac{1}{n} + \sqrt{|u_n(t)|}$ ($\tau \leqslant t \leqslant T$; $n \in \mathbb{N}$). Ustalmy $\theta \in (\tau, T)$. Dla $u(\theta)$ co najmniej jedno z następujących zdań jest prawdziwe:

(I) $u_n(\theta) \leqslant 0$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$,

(II) $u_n(\theta) > 0$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

W przypadku (I) z przytoczonego powyżej lematu otrzymujemy, że dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $-u_n(\tau) \geqslant \frac{1}{4}(\theta - \tau)^2 > 0$, co jest niemożliwe, gdyż $u(\tau) \in \mathrm{c}_0$. W przypadku (II) podobnie otrzymujemy, że $u_n(T) \geqslant \frac{1}{4}(T - \theta)^2 > 0$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, co jest niemożliwe, ponieważ $u(T) \in \mathrm{c}_0$. Ostatecznie $u\colon [\tau, T] \to \mathrm{c}_0$ nie może istnieć. □

Komentarz. Przestrzeń c_0 jest, jak wiadomo, przestrzenią bardzo szczególną. Naturalne wydaje się rozważanie następującego problemu: Czy w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha E istnieje taka funkcja ciągła $f\colon E \to E$, że równanie różniczkowe $u' = f(u)$ nie ma rozwiązania?

Według wiedzy autorów jest to obecnie problem otwarty. Oczywiście w przypadku, gdy przestrzeń E jest skończenie wymiarowa, na mocy twierdzenia Peana (por. np. [4]), każde równanie różniczkowe z ciągłą prawą stroną ma rozwiązanie.

Częściowe rozwiązanie przedstawionego wyżej problemu można znaleźć w pracy Hájka oraz Johanisa z 2010 roku, którzy pokazali, że odpowiedź jest twierdząca w przypadku, gdy przestrzeń E jest ośrodkowa. Ogólniej, pokazali oni, że twierdzenie jest prawdziwe w przypadku każdej przestrzeni Banacha E zawierającej taką domkniętą podprzestrzeń E_0, że przestrzeń ilorazowa E/E_0 jest ośrodkowa i nieskończenie wymiarowa (przykładowo przestrzeń l_∞ ma tę własność).

Problem istnienia takich podprzestrzeni jest obecnie otwartym problemem ogólnej teorii przestrzeni Banacha. Warto zauważyć, że jeżeli każda nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha E ma powyższą własność, to rezultat Hájka i Johanisa w pełni rozwiązują postawiony powyżej problem.

[Literatura]

[1] Jean Dieudonné, *Deux exemples singuliers d'équations différentielles*, Acta Sci. Math. 12B (1950), 38–40.

[2] Petr Hájek, Michal Johanis, *On Peano's theorem in Banach spaces*, J. Differential Equations 249 (2010), 3342–3351.

[3] Julian Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.

[4] Andrzej Pelczar, Jacek Szarski, *Wstęp do teorii równań różniczkowych, część I*, PWN, Warszawa 1987.

[5] James A. Yorke, *A continuous differential equation in Hilbert space without existence*, Funkcialaj Ekvac. 13 (1970), 19–21.

Autorzy: Wojciech Bielas, Szymon Draga, Piotr Idzik, Konrad Jałowiecki, Magdalena Nowak, Agnieszka Piszczek, Magdalena Sitko, Peter Volkmann, Adam Wrzesiński, Radosław Zawiski, Joanna Zwierzyńska

---

[Statystyka, rodzaj żeński – Gertrude Cox]

Pomimo nazywania matematyki królową, nie królem nauk, w przypadku matematyczek użycie rodzaju żeńskiego nie jest już aż tak oczywiste. Przekonanie, że „matematyk = mężczyzna" dominuje także w sferze językowej. O ile więc nie mówimy o Kowalewskiej czy Hypatii, automatycznie podporządkowujemy się temu swoistemu językowego patriarchatowi – któż by w końcu debatował nad płcią Germain bądź Galois?

W literaturze zaskakująco możemy natknąć się na informacje na temat testu Cochrana-Coxa, służącego badaniu równości średnich w populacjach o różnych wariancjach. Osobom zajmującym się statystyką te nazwiska są zapewne dobrze znane – Cochran i Cox odnieśli na tym polu wiele sukcesów. Nie dość jednak widać, by płeć obojga z nich znalazła odzwierciedlenie w nazwie stworzonego przez nich testu statystycznego.

Gertrude Cox urodziła się w Stanach Zjednoczonych w 1900 roku. Jej kariera naukowa rozpoczęła się dość nietypowo – choć w przyszłości pragnęła zostać pastorem i prowadzić sierociniec, postanowiła studiować matematykę, ponieważ ten przedmiot uznawała za... najłatwiejszy. Aby zarobić na czesne, rozpoczęła pracę jako operator mechanicznych maszyn liczących.

To w tym okresie Cox zainteresowała się statystyką. W 1931 roku jako pierwsza osoba w historii Uniwersytetu Stanowego Iowa otrzymała tytuł magistra w tej dziedzinie. Ponieważ brak kursów pedagogicznych zamykał jej drogę do nauczania matematyki w szkole, a departament matematyki nie planował przyznać asystentury kobiecie, postanowiła kontynuować karierę naukową na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley, gdzie rozpoczęła studia doktoranckie w zakresie statystyki psychologicznej.

Niestety (dla psychologii) po dwóch latach George Snedecor (kolejne nazwisko znane z pewnością każdemu studentowi ze słyszenia), promotor Cox z Uniwersytetu w Iowa, zaprosił ją do współtworzenia nowo otwartego laboratorium statystycznego. Cox z zaproszenia skorzystała i jej statystyczna kariera rozpoczęła się na dobre.

Opublikowana przez nią i Williama Cochrana w 1950 roku praca „Experimental Design" błyskawicznie stała się obowiązkową pozycją zarówno dla statystyków, jak i naukowców, którzy dzięki opisanym w niej metodom mogli skuteczniej planować eksperymenty i wyciągać z nich trafniejsze wnioski. To właśnie w tej pozycji znaleźć można opis testu Cochrana-Cox, który – mam nadzieję – od tej pory będzie określany właśnie tą nazwą.

Magdalena Nowak

[O pewnej formule na liczby pierwsze]

Poniższy artykuł będzie próbą[1] znalezienia wzoru jawnego na n-tą liczbę pierwszą – czegoś, co przez wiele stuleci uchodziło za niemożliwe do uzyskania. Zanim przejdziemy do sedna, sprawdźmy, jak dawniej szukano formuł, które dawałaby liczby pierwsze dla pewnego ciągu liczb naturalnych. Jedną z prostszych metod jest znajdowanie odpowiedniego wielomianu, którego wyznaczanie wartości nie jest skomplikowanym obliczeniowo procesem. Wśród ciekawszych formuł można wyróżnić trójmian kwadratowy Edwarda Brinda Escotta z 1879 roku:

$$f(n) = n^2 - 79n + 1601,$$

który generuje liczby pierwsze dla liczb z zakresu $\{1, \ldots, 79\}$ (dociekliwy Czytelnik sprawdzi poprawność formuły dla chociażby pierwszych wyrazów). Można się zastanowić, czy dla każdego dowolnie długiego (skończonego) ciągu kolejnych liczb można znaleźć taki niestały wielomian ustalonego stopnia, który generowałby liczby pierwsze dla wyrazów tego ciągu. Oczywiście nie istnieje taki wielomian zwracający liczby pierwsze dla każdego n naturalnego. Możemy to łatwo wykazać.

Twierdzenie 1. *Nie istnieje taki niestały wielomian $P(n)$, że*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ P(n) \in \mathbb{P}$$

Dowód. Przeprowadźmy klasyczny dowód nie wprost i przypuśćmy, iż taki wielomian $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje. Z założenia wiadomo, iż $P(1) = p \in \mathbb{P}$, co jest równoważne, iż zachodzi $P(1) \equiv 0 \pmod{p}$. Dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$

[1] Na szczęście udaną :).

zachodzi także $P(1+kp) \equiv 0 \pmod{p}$. Skoro p jest pierwsza oraz $P(n)$ generuje tylko liczby pierwsze, to:

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ P(1+kp) = p = P(1)$$

co oznacza, iż dany wielomian jest albo stały, albo posiada nieskończenie wiele ekstremów, co oczywiście dla stopnia naturalnego nie jest możliwe. □

Znajdowanie liczb pierwszych za pomocą wielomianów jest metodą nieefektywną dla nieskończonego ciągu liczb naturalnych. Zdecydowanie potrzebne jest narzędzie o większych możliwościach. Tę szansę daje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 2 (Wilsona). *Liczba p jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy p dzieli $(p-1)!+1$.*

Zanim przejdziemy do dowodu, zwróćmy uwagę, iż jest to silne twierdzenie z racji implikacji obustronnej. Praktycznie jednak nie jest ono wykorzystywane do numerycznego sprawdzania pierwszości liczb z racji występującej silni, dla której nieznane są metody sprawnego[2] wyznaczania jej wartości. Chociaż twierdzenie to znane było wcześniej (można znaleźć je w pracach Alhazena z przełomu między X a XI wiekiem) zostało okraszone nazwiskiem Johna Wilsona, którego sformułowanie znane w dzisiejszej formie znalazło się w pracy Edwarda Waringa [4], nauczyciela Wilsona[3].

Dowód. Przypuśćmy, iż liczba p jest pierwsza. Należy pokazać, iż zachodzi $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Wybierzmy a ze zbioru $P = \{1,\ldots,p-1\}$. Wtedy

$$ab \equiv 1 \pmod{p}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla b ze zbioru P (innymi słowy P tworzy ciało $\mathbb{Z}_p$, w którym każdy element jest odwracalny). Jeżeli $a=b$, to $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Skoro tak, to p dzieli $a^2-1 = (a-1)(a+1)$, więc $a \in \{1, p-1\}$. Możemy połączyć liczby w pary z elementami odwrotnymi, uzyskując następujący iloczyn:

$$2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$$

Mnożąc stronami przez $(p-1)$, otrzymujemy tezę. Przypuśćmy teraz, że prawdziwe jest zdanie $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Wykażemy nie wprost pierwszość p. Załóżmy $c \in \mathbb{P} \cap (2,p)$, $c \mid p$, czyli że istnieje nietrywialny pierwszy dzielnik p. Z przechodności podzielności wynika następujący fakt:

[2]Przez termin „sprawny” rozumiemy tu relatywnie niską złożoność obliczeniową i pamięciową.

[3]Warto zwrócić uwagę, iż dowód został przeprowadzony nie przez Wilsona czy Waringa, lecz Lagrange'a w 1771 roku.

$$[c \,|\, p \wedge p \,|\, (p-1)! + 1] \Rightarrow c \,|\, (p-1)! + 1$$

Jest to sprzeczność, bo $c \,|\, (p-1)!$ oraz $c \,|\, (p-1)! + 1$, co oznacza, że $c > 2$ musiałoby dzielić dwie kolejne liczby. A zatem twierdzenie jest prawdziwe. $\square$

Konsekwencją twierdzenia Wilsona może być jawna forma testu pierwszości, który można sformułować następująco:

$$\mathrm{prime}(n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{P} \\ 0, & n \notin \mathbb{P} \end{cases}$$

Aby zredefiniować tę funkcję, wystarczy sprawdzić, czy n dzieli $(n-1)!+1$; innymi słowy – czy wyrażenie $\frac{(n-1)!+1}{n}$ jest liczbą naturalną. Można to sprawdzić za pomocą formuły $\mathrm{int}(x) = \lfloor \cos^2(\pi x) \rfloor$, które zwróci 1 bądź 0 w zależności od całkowitości argumentu[4]. Wtedy:

$$\mathrm{prime}(n) = \left\lfloor \cos^2 \left(\pi \frac{(n-1)! + 1}{n} \right) \right\rfloor$$

Jedną z ważniejszych funkcji w teorii liczb jest funkcja $\pi(n)$, która zwraca ilość liczb pierwszych niewiększych od n. Na podstawie powyższej informacji możemy ją zapisać poprzez proste sumowanie:

$$\pi(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{prime}(k)$$

Jeżeli mamy aspiracje wyznaczyć wzór na n-tą liczbę pierwszą, możemy kontynuować wyprowadzenia. Funkcja $\pi(n)$ jest poniekąd funkcją odwrotną do szukanej formuły p_n, ponieważ dla każdego n prawdziwe jest $\pi(p_n) = n$, przy czym $p_{\pi(n)} = n$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą[5]. Przejdźmy do kolejnego kroku. Rozważmy funkcję zadaną poniższym wzorem:

$$\mathrm{primepi}(k) = \pi(k)\,\mathrm{prime}(k) = \begin{cases} \pi(k), & k \in \mathbb{P} \\ 0, & k \notin \mathbb{P} \end{cases}$$

Zwraca ona $\pi(k)$ dla każdej liczby pierwszej i 0 w przeciwnym razie. Złożymy powyższą funkcję z testem zerowości (dowiemy się zaraz, do czego będzie nam to przydatne):

[4]Oczywiście nie jest to jedyny sposób. Zdefiniujmy równoważnie: $\mathrm{int}(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 1$.

[5]Dowód tych własności jest trywialny, dla ćwiczenia zalecam przeprowadzić we własnym zakresie.

$$\operatorname{zero}(x) = \left\lfloor \frac{1}{1+|x|} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Zastanówmy się przez moment, jak powyższa funkcja działa. Jeżeli argument jest większy na moduł od 0, całe wyrażenie jest ułamkiem właściwym, a więc z przedziału $(0, 1)$. Wtedy najmniejszą liczą całkowitą niewiększą od danego wyrażenia jest oczywiście 0. Dzięki temu prostemu odwzorowaniu możliwe jest otrzymanie funkcji która sprawdzi, czy zadana liczba jest n-tą liczbą pierwszą:

$$\begin{aligned} k \operatorname{zero}\big(n - \operatorname{primepi}(k)\big) &= k \left\lfloor \frac{1}{1 + |n - \operatorname{primepi}(k)|} \right\rfloor = \\ &= \begin{cases} k, & k \text{ jest } n\text{-tą liczbą pierwszą} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \end{aligned}$$

Teraz, na podstawie twierdzenia Czebyszewa (mówiącego, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba pierwsza większa od n i mniejsza bądź równa $2n$, co można zapisać w następujący sposób z użyciem poznanej funkcji $\pi(n)$:

$$\forall_{n \geqslant 1} \; \pi(2n) > \pi(n),$$

którego konsekwencją jest fakt, iż dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $p_n < 2^n$ (przy czym umówmy się dla wygody, iż $p_1 = 1$)) możemy już otrzymać końcową postać formuły wyznaczającą n-tą liczbę pierwszą, sumując potencjalnych „kandydatów” na n-tą liczbę pierwszą:

$$p_n = \sum_{k=1}^{2^n} k \operatorname{zero}\big(n - \operatorname{primepi}(k)\big)$$

Podstawiając wszystkie funkcje pomocnicze (należy uważać na kolizję zmiennych) w pierwotnej formie, otrzymuje się ostatecznie monstrualny wzór:

$$p_n = \sum_{k=1}^{2^n} k \left\lfloor \frac{1}{1 + \left| n - \left(\sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \cos^2\left(\frac{\pi((j-1)!+1)}{j} \right) \right\rfloor \right) \left\lfloor \cos^2\left(\frac{\pi((k-1)!+1)}{k} \right) \right\rfloor \right|} \right\rfloor$$

Możemy przekonać się, czy uzyskana formuła rzeczywiście działa (dla zainteresowanych na końcu zamieściłem kod formuły dla programu `Mathematica`). Natomiast jej wysoka złożoność (nawet w zapisie!) sprawia, iż tak jak w przypadku samego twierdzenia Wilsona, jest ona nieużyteczna w testach numerycznych. Niemniej jednak stanowi intrygującą ciekawostkę. Na koniec pozostawiam Czytelnikowi do rozważenia następujące twierdzenie oraz dwa ćwiczenia:

Twierdzenie 3. *Liczby p i $p+2$ są bliźniaczymi liczbami pierwszymi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:*

$$4\big((p-1)!+1\big) \equiv p \pmod{p(p+2)}$$

Ćwiczenie 1. Znaleźć jawny wzór funkcji $\sigma_x(n)$ przypisującą sumę dzielników liczby naturalnej n do potęgi x, np.:

$$\sigma_1(12) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 6^1 + 12^1 = 28.$$

Ćwiczenie 2. Znaleźć wzór funkcji $\varphi(n)$ Eulera zwracającą każdej liczbie naturalnej liczbę liczb względnie z nią pierwszych niewiększych od niej samej; przykładowo $\varphi(10) = 1^0 + 3^0 + 7^0 + 9^0 = 4$.

Załącznik. Kod formuły (`Mathematica`):

```
p[n_] := Sum[k Floor[1/(1 + Abs[n -
Sum[Floor[Cos[Pi ((j - 1)! + 1)/j]^2], {j, 1, k}]
Floor[Cos[Pi ((k - 1)! + 1)/k]^2]])], {k, 1, 2^n}]
```

[Literatura]

[1] Joseph Louis Lagrange, *Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers* Berlin, 1771.

[2] John J. O'Connor, Edmund F. Robertson, *Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytha*, MacTutor History of Mathematics archive.

[3] Wacław Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa-Wrocław, 1950.

[4] Edward Waring, *Mediationes Algebraicae*, Cambridge, 1770.

Mateusz Szymański

[Zaproszenie na II Sympozjum z literaturoznawcami]

Zapraszamy wszystkich na II Sympozjum Koła Naukowego Matematyków i Koła Naukowego Antropologii Literatury UŚ. Ostatnio rozmawialiśmy o przestrzeni; tym razem tematyką będzie czas. Spotkanie otworzy wykład dr. hab. Ryszarda Koziołka, zatytułowany Ąspekty czasu w »Lalce« Bolesława Prusa". Zaczynamy 23 maja, o 14, w sali 301 Wydziału Filologicznego w Katowicach. Więcej informacji na następnej stronie.

II SYMPOZJUM

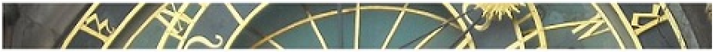
Koła Naukowego Antropologii Literatury UŚ

Koła Naukowego Matematyków UŚ

O-POWIEDZIEĆ CZAS

Wykład otwierający sympozjum:

Aspekty czasu w „Lalce" Bolesława Prusa



wygłosi:

dr hab. Ryszard Koziołek

Udział wezmą: dr hab. Leszek Zwierzyński

oraz członkowie obu kół.

Zapraszamy 23 maja 2012 r. (godz. 14.00)

Wydział Filologiczny UŚ Katowice (sala 301)

Kontakt:
antrolit@gmail.com
knm@knm.katowice.pl

[Śląski Integracyjny Piknik Naukowy]

Zapraszamy wszystkich do wzięcia udziału w I Śląskim Integracyjnym Pikniku Naukowym, który odbędzie się 26 maja 2012 roku (sobota) w godzinach 11.00–16.00 w Śląskim Międzyuczelnianym Centrum Edukacji i Badań Interdyscyplinarnych w Chorzowie. Piknik przyjmie formę Święta Nauki, podczas którego studenci oraz pracownicy Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ postarają się w formie zabawy przybliżyć uczestnikom nauki ścisłe. W programie imprezy przewidziano widowiskowe pokazy doświadczeń fizycznych, chemicznych i matematycznych oraz liczne warsztaty.

Członkowie Koła Naukowego Matematyków UŚ również przygotowali na tę okazję dla uczestników Pikniku różnego rodzaju warsztaty – *Łamigłówki logiczne*, *Świat wielościanów*, *Kawiarnia Szkocka*, *Fraktale*. Przygotowaliśmy również matematyczną wersję dobrze znanej gry *Monopoly*. Uczestników warsztatów czeka gimnastyka umysłu i dłoni, będą mogli spróbować swoich sił w grze komputerowej i przejść tajemniczy labirynt. Pomożemy im oswoić się z różnymi dziwnie wyglądającymi wielościanami czy kolorowymi fraktalami.

Wszystkie osoby chcące pomóc podczas Pikniku zapraszamy do pokoju 524 lub prosimy o kontakt na adres mailowy `b.lojan@knm.katowice.pl`.

Organizatorami Pikniku są: Śląskie Stowarzyszenie Edukacji i Rehabilitacji Osób Niepełnosprawnych „Akcent” oraz Uniwersytet Śląski.

Beata Łojan

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Wojciech Bielas, Szymon Draga, Piotr Idzik, Konrad Jałowiecki, Beata Łojan, Magdalena Nowak, Agnieszka Piszczek, Magdalena Sitko, Mateusz Szymański, Peter Volkmann, Adam Wrzesiński, Radosław Zawiski, Joanna Zwierzyńska
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

maj 2012