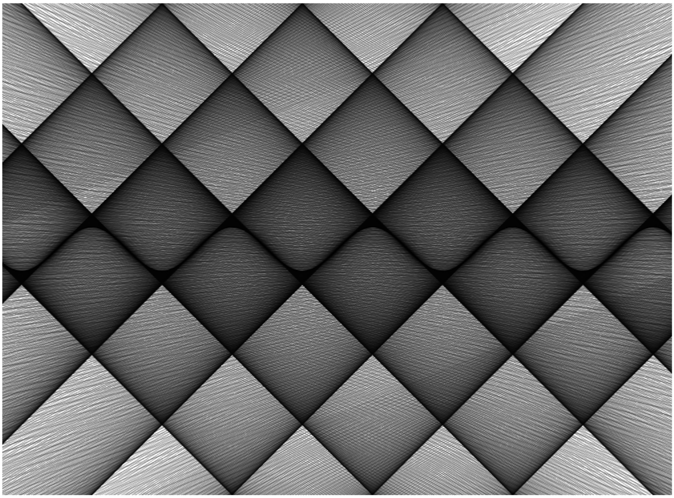
[MACIERZATOR64]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Źródło: opr. własne – Michał Kolany

Witamy w wiosennym numerze [MACIERZATORA]!

To już ostatni numer [Macierzatora] przed wakacjami. Tym razem przeczytamy o tym, jak Stefan Banach szukał zapałek i co ma z tym wspólnego Księga Szkocka, dowiemy się czegoś o jednym z ważniejszych narzędzi kombinatorycznych – zasadzie włączeń i wyłączeń, przypomnimy sobie co nieco o bazie Hamela i wreszcie przekonamy się, jak wykorzystać matematykę przy ocenianiu opłacalności inwestycji.

A na okładce – oto co może powstać ciekawego z zabawy w rysowanie wykresów związanych z rozwinięciem funkcji w szereg Taylora w Pythonie. Kto spodziewał się, że styczne do sinusa mogą wyglądać tak elegancko?

Miłej lektury!

Redakcja

[O tym, jak Banach szukał zapałek]

Około osiemdziesiąt lat temu, we Lwowie, przy placu Akademickim 9, w Kawiarni Szkockiej, niemalże na porządku dziennym miały miejsce spotkania kwiatu polskich matematyków. Wśród nich, między innymi, Stefan Banach, Stanisław Mazur, Hugo Steinhaus, Stanisław Ulam. Czasami widywano tam także matematyków z Warszawy, Kazimierza Kuratowskiego, Alfreda Tarskiego czy Wacława Sierpińskiego. Kawiarnię Szkocką odwiedzali również naukowcy z zagranicy. Podczas tych posiedzeń omawiano zarówno poważne tematy ze świata polityki, jak i plotkowano o tym, co się dzieje w życiu akademickim. Wszystkie te dyskusje musiały jednak usunąć się w cień, gdy na ustach pojawiała się matematyka.

W trakcie takich spotkań naukowcy mieli w zwyczaju zapisywać ołówkiem problemy, pomysły, rachunki i wszystko, co było im potrzebne, na blatach tamtejszych stołów, co wiązało się z kilkoma niedogodnościami. Po pierwsze, jak można się domyślić, właściciel kawiarni nie był na taki widok wniebowzięty. Po drugie, bywało, że te zebrania trwały do nocy albo nawet i rana; uczestnicy miewali zrozumiałe problemy z przypomnieniem sobie wniosków, do jakich doszli poprzedniego dnia, a zapisków na stole czasem na próżno było szukać. W związku z tym pewnego dnia, w 1935 roku, Łucja Banach, żona Stefana, podarowała matematykom gruby zeszyt, w którym mieli zapisywać to, co do tej pory wylądowałoby na blacie stołu. Powstałą w ten sposób księgę nazwano Księgą Szkocką. Zawierała ona 193 problemy, niektóre do dziś nie rozwiązane. Były tam zagadnienia poważne i bardzo trudne, ale także wpisane dla żartu. Wśród nich zadanie, którego autorem był Hugo Steinhaus, a inspiracją – zmagania Stefana Banacha ze znalezieniem zapałki w kieszeniach. Brzmi ono następująco:

Pewien matematyk miał w płaszczu dwa pudełka zapałek, po N zapałek w każdym. Zapałki wybierał na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili wypalenia wszystkich zapałek z jednego pudełka, w drugim zostanie dokładnie k zapałek?

Spróbujmy to zadanie rozwiązać. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gdzie $\Omega := \{(a_1, ..., a_M) : a_i \in \{1, 2\}, i \in \{1, ..., M\}$, dla pewnego $M \in \{N, ..., 2N$; w ciągach tych wyrazów równych 2 jest dokładnie N lub $M - N$. Ciągi należące do zbioru Ω będziemy interpretować jako kolejność wyciągania zapałek, gdzie 1 oznaczać będzie zapałkę z pierwszego pudełka, a 2 – z drugiego; $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Wiemy, że zapałki są wybierane na chybił trafił, czyli do momentu wypalenia wszystkich zapałek z któregoś z pudełek prawdopodobieństwo wyciągnięcia zapałki z pudełka 1 jest takie samo, jak wyciągnięcia zapałki z pudełka 2, czyli $\frac{1}{2}$.

Przyjrzyjmy się teraz zdarzeniom sprzyjającym w naszym zagadnieniu. Ciąg $(a_1, ..., a_M)$ będzie zdarzeniem sprzyjającym, jeśli $a_M = 1$ oraz $a_{i_l} = 1$ dla pewnych $i_1, ..., i_{N-1} \in \{1, ..., M-1\}$ lub $a_M = 2$ oraz $a_{i_l} = 2$ dla $i_1, ..., i_{N-1} \in \{1, ..., M-1\}$. Oznaczmy przez k liczbę zapałek pozostałych w pudełku w chwili wypalenia ostatniej zapałki z drugiego pudełka. To znaczy, że zużyliśmy już $M = 2N - k$ zapałek, w tym N z jednego z pudełek; tym samym ciąg wyciągania zapałek jest postaci:

$$(a_1, ..., a_{M-1}, 1$$

gdzie dla pewnych $i_1, ..., i_{N-1} \in \{1, ..., M-1\}$ istnieją $a_{i_1} = ... = a_{i_{N-1}} = 1$ lub

$$(a_1, ..., a_{M-1}, 2)$$

gdzie dla pewnych $i_1, ..., i_{N-1} \in \{1, ..., M-1\}$ istnieją $a_{i_1} = ... = a_{i_{N-1}} = 2$. Prawdopodobieństwo każdego takiego ciągu jest równe $\left(\frac{1}{2}\right)^M$; pozostaje nam policzyć wszystkie takie ciągi. Każdy z nich i tylko takie ciągi można wybrać, wybierając $N-1$ elementów ciągu, czyli wybierając $N-1$ spośród $M-1 = 2N-k-1$ wyrazów. Dodatkowo, interesujących nas ciągów mamy dwa rodzaje, oba powstają w wspomniany sposób. Tak więc liczba takich ciągów to:

$$\binom{2N-k-1}{N-1}2$$

Stąd szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\binom{2N-k-1}{N-1}2\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k} = \binom{2N-k-1}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k-1}.$$

Warto zauważyć, że powyższe doświadczenia polegające na wyciąganiu zapałki na chybił trafił nie są niezależne. Zależą od siebie choćby w ten sposób, że po wyciągnięciu N zapałek z jednego pudełka możemy wyciągnąć już tylko zapałki z drugiego. Dzięki tej obserwacji wiemy, że nie możemy skorzystać tutaj ze schematu Bernoulliego, mimo że wynik może to sugerować.
Jedyne co nam pozostaje, to zaznaczyć, że potrafimy już rozwiązać jeden ze 193 problemów z Księgi Szkockiej – powodzenia z pozostałymi!

Wojciech Bury

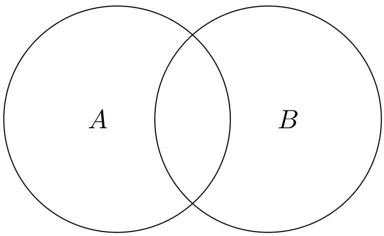
[Zasada włączeń i wyłączeń]

Dzisiejszym poruszanym tematem będzie *zasada włączeń i wyłączeń*, która jest jednym z ważniejszych narzędzi kombinatorycznych. Naszą wędrówkę przez różne odsłony tej reguły zaczniemy od problemy bardzo prostego, żeby nie powiedzieć – banalnego.

Niech dane będą dwa zbiory skończone A, B. Chcemy policzyć, ile elementów posiada suma $A \cup B$, znając moc zbioru (czyli liczbę elementów) A oraz B, które oznaczymy odpowiednio $|A|$ oraz $|B|$. Wówczas, jeżeli zbiory A oraz B są rozłączne, tj. nie posiadają elementów wspólnych, wystarczy zsumować obie wielkości, by uzyskać szukaną moc zbioru $|A \cup B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \quad A \cap B = \emptyset. \tag{0.1}$$

To było naprawdę proste. Co jeżeli zbiory nie są rozłączne? Popatrzmy na sytuację poniżej i pomyślmy chwilę.

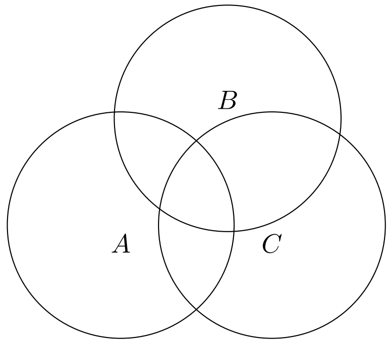


By zliczyć, ile elementów jest w sumie, wystarczy zsumować moc zbioru A oraz moc zbioru B, a następnie, by nie zliczać pewnych elementów dwukrotnie, odjąć część wspólną. Tym samym otrzymujemy równość:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Banalne, prawda? Otrzymana zależność ma sens nawet w przypadku zbiorów nieskończonych, o ile tylko $|A \cap B|$ jest skończone (w takim przypadku suma zbiorów będzie nieskończona). Oczywiście, jeżeli zbiory są rozłączne, tj. $|A \cap B| = 0$, wzór (0.1) okazuje się szczególnym, być może „mało ciekawym” przypadkiem.

W przypadku trzech zbiorów sprawa się nieco komplikuje, ale, z pomocą diagramu Vienne'a, jesteśmy w stanie zaradzić i w takiej sytuacji.



Jeżeli postąpimy podobnie jak dla dwóch zbiorów i skrupulatnie uwzględnimy krotność zliczanych podzbiorów, powinniśmy uzyskać następującą formułę:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Pewna reguła powinna być już zauważalna. Spróbujemy ją zapisać w postaci zwartej dla większej liczby zbiorów. Tym razem, zamiast używać niewygodnych liter na oznaczenie następnych zbiorów, po prostu ponumerujemy je kolejnymi liczbami naturalnymi: od A_1 aż do A_n, gdzie n jest pewną dodatnią liczbą całkowitą.

Twierdzenie 1 (Zasada włączeń i wyłączeń dla zbiorów)**.** Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą pewnymi podzbiorami skończonymi X. Wówczas zachodzi równość

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \ldots +$$

$$-|A_{n-1} \cap A_n| + \ldots + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

lub, inaczej zapisana:

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

By określić liczebność sumy zbiorów, wystarczy dodać moce wszystkich zbiorów z osobna, odliczyć części wspólne wszystkich par, po czym dodać moce zbiorów iloczynu wszystkich „trójek”, a następnie kontynuować postępowanie aż do włączenia bądź wyłączenia przekroju wszystkich zbiorów. Stąd pochodzi nazwa zasady – w niej jest też zawarta cała idea zliczania.

Jesteśmy również w stanie wyznaczyć moc przekroju zbiorów. W tym celu wystaczy sprytnie wykorzystać prawo de Morgana:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus A_k).$$

Jeśli dobrze pamiętasz, Czytelniku, powyższe prawa przenoszą się na rachunek prawdopodobieństwa, tj. jeżeli za P oznaczymy pewną miarę prawdopodobieństwa podzbiorów $\Omega^\star$, to dla dwóch zbiorów $A, B \subseteq \Omega$ zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

a także, ogólniej:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right). \tag{0.2}$$

Oczywiście, nasza miara nie musi być miarą prawdopodobieństwa, tj. spełniającą równość $P(\Omega) = 1$. Reguła włączeń-wyłączeń zachodzi również dla dowolnej funkcji addytywnej zbioru λ określonej na pewnej algebrze $\mathfrak{N}$ podzbiorów X: funkcji $\lambda \colon \mathfrak{N} \to [0, +\infty]$ spełniającej $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ dla dowolnych rozłącznych podzbiorów X. Wzór jest całkowicie analogiczny do (0.2):

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right).$$

Równość ma sens, gdy wartości $\lambda(A_k)$ są skończone (w przeciwnym razie możemy mieć problem z wyrażeniami typu $\infty - \infty$). Zauważmy również, że funkcja określająca moc zbioru, *miara licząca* $|\cdot|$, jest funkcją addytywną – uogólniliśmy więc zasadę włączeń i wyłączeń dla zbiorów i przeszliśmy na ogólniejszy byt matematyczny: funkcje addytywne (w szczególności: miary). Naszą regułę możemy przedstawić w znacznie ogólniejszym, abstrakcyjnym wymiarze.

Twierdzenie 2 (Ogólna zasada włączeń i wyłączeń)**.** Niech $(L, \wedge, \vee)$ będzie kratą rozdzielną, natomiast G – grupą abelową. Niech ponadto $\varphi \colon L \to$

*Oczywiście do tego jest potrzebne odpowiednie σ-ciało zbiorów.

G będzie funkcją spełniającą $\varphi(a \wedge b)\varphi(a \vee b) = \varphi(a)\varphi(b)$ dla wszystkich $a, b \in L$. Wówczas dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in L$ zachodzi:

$$\varphi(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \varphi\left(a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k}\right) \right]^{(-1)^{k-1}}. \quad (0.3)$$

Przypomnijmy, *kratą* nazywamy dowolny zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy zbiór dwuelementowy ma swój kres górny oraz kres dolny. Krata L jest *rozdzielna*, jeżeli dla wszystkich elementów $x, y, z \in L$ zachodzi *prawo rozdzielności*:

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z), \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

W zapisie twierdzenia został wykorzystana standardowa notacja multyplikatywna dla grup, aczkolwiek w większości zastosowań grupą G jest po prostu zbiór liczb rzeczywistych z dodawaniem. Zdarza się jednak, że zasada włączeń i wyłączeń sprawdza się w przypadku, gdy działaniem grupowym jest operacja mnożenia: czego przykładem jest poniższe twierdzenie z zakresu teorii liczb:

Twierdzenie 3. Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest równość

$$\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathrm{NWD}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \right)^{(-1)^{k-1}}$$

lub, inaczej zapisana:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{(a_1)(a_2) \cdot \ldots \cdot (a_n)}{(a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdot (a_{n-1}, a_n)} \cdot \ldots \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{(-1)^{n-1}},$$

gdzie $\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb $a_1, \ldots, a_n$, natomiast $\mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_n) = [a_1, \ldots, a_n]$ – największą wspólną wielokrotność.

Twierdzenie to wypływa z ogólnej zasady włączeń i wyłączeń: w tym szczególnym przypadku kratę L stanowi zbiór liczb naturalnych z częściowym porządkiem podzielności $a|b$ (a dzieli b): kresem górnym dowolnych dwóch liczb naturalnych jest ich największa wspólna wielokrotność, natomiast kresem dolnym – największy wspólny dzielnik. Grupą G jest zbiór dodatnich liczb wymiernych z mnożeniem $\mathbb{Q}_+$. Możemy nietrudno sprawdzić, że warunek $\mathrm{NWD}(a, b)\,\mathrm{NWW}(a, b) = ab$ jest w istocie spełniony dla $a, b \in \mathbb{N}$ (funkcją φ jest funkcja $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ zadana wzorem $\varphi(n) = n$).

Jednym z nietrywialnych zastosowań reguły włączeń i wyłączeń jest *wzór Möbiusa*.

Twierdzenie 4 (Wzór Möbiusa)**.** Niech $f\colon \mathbb{N} \to G$ będzie dowolną funkcją ze zbioru liczb naturalnych w grupę abelową*. Określmy $g\colon \mathbb{N} \to G$ wzorem:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

gdzie powyższa suma przebiega po wszystkich dzielnikach n. Wówczas zachodzi równość:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d),$$

gdzie $\mu\colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ jest *funkcją Möbiusa* zdefiniowaną jako:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{gdy liczba } n \text{ jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej,} \\ (-1)^k, & \text{gdy liczba } n \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych liczb pierwszych.} \end{cases}$$

By zaobserwować związek między powyższym twierdzeniem, a regułą włączeń-wyłączeń, przyjmijmy za L zbiór wszystkich podzbiorów liczb naturalnych z częściowym porządkiem zawierania $\subseteq$. Określmy $\varphi\colon L \to G$ wzorem:

$$\varphi(S) = \sum_{d \in S} f(d).$$

Niech $p_1, \ldots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi dzielącymi n oraz niech

$$S_i = \{d \in \mathbb{N}\colon d|(n/p_i)\}.$$

*Jest to tak zwana funkcja arytmetyczna.

Z ogólnej zasady włączeń i wyłączeń uzyskujemy*, iż:

$$g(n)-f(n) = \varphi(S_1\cup\ldots\cup S_k) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_j\leqslant k} \varphi\left(S_{i_1}\cap\ldots\cap S_{i_j}\right).$$

Gdy powrócimy do definicji funkcji oraz zbiorów S_i, uzyskamy:

$$g(n) - f(n) = \sum_{1<d|n} (-1)g(n/d)\mu(d),$$

co przegrupowaniu wyrazów daje nam żądany wzór Möbiusa. Warto się przekonać, że powyższy wzór obejmuje dosyć znaną funkcję arytmetyczną – funkcję φ Eulera (tocjent):

$$\varphi(n) = n\left(1-\tfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\tfrac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\tfrac{1}{p_k}\right),$$

gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są wszystkimi czynnikami pierwszymi liczby n.

Zasada włączeń i wyłączeń przejawia się także w kontekstach, w których na ogół nie myślimy o niej jawnie. Niech $U, V \subseteq X$ będą podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni liniowej X. Jak wiemy z algebry liniowej, tak zwana *suma algebraiczna*

$$U + V = \{u + v \colon u \in U,\ v \in V\}$$

również stanowi podprzestrzeń liniową X, podobnie jak przecięcie podprzestrzeni $U \cap V$. Jest jasne, iż zachodzi wzór opisujący zależność między wymiarami U, V, $U + V$ oraz $U \cap V$:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$

o ile wymiar $U \cap V$ jest skończony. W szczególności, gdy $U \cap V = \{0\}$ (gdzie 0 jest wektorem zerowym X), wymiar sumy algebraicznej jest sumą wymiarów, co odpowiada sytuacji, gdy $U + V$ jest *sumą prostą* $U \oplus V$. Rezultat ten oczywiście rozszerza się na większą liczbę podprzestrzeni.

Teraz, gdy nabyliśmy już pewnych intuicji dotyczących zasady włączeń i wyłączeń, na zakończenie możemy ją udowodnić – zadanie to okaże się znacznie prostsze niż można z początku przypuszczać. Uczynimy to indukcyjnie.

*Sprawdzenie założeń ogólnej zasady włączeń i wyłączeń pozostawiam Czytelnikowi.

Dowód. Niech L, G, φ będą jak w założeniach zasady włączeń i wyłączeń. Dowód przeprowadźmy indukcyjnie po n. W przypadku $n = 1$ tożsamość jest trywialna, w przypadku $n = 2$ równość (0.3) sprowadza się do założenia $\varphi(a_1 \vee a_2)\varphi(a_1 \wedge a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$. Ustalmy zatem $n > 1$ oraz załóżmy, że teza zachodzi dla wszystkich $k < n$. Wówczas, dla układu $a_1, \ldots, a_n \in L$, uzyskujemy na mocy założenia funkcyjnego φ:

$$\varphi(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = \varphi((a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}) \wedge a_n)^{-1}\varphi(a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1})\varphi(a_n).$$

Następnie, wykorzystując rozdzielność kraty L, możemy rozbić wyrażenie wewnętrzne:

$$\ldots = \varphi((a_1 \wedge a_n) \vee \ldots \vee (a_{n-1} \wedge a_n))^{-1}\varphi(a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1})\varphi(a_n).$$

Pozostaje wykorzystać założenie indukcyjne:

$$\ldots = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left[\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n-1}\varphi\left(a_{i_1}\wedge\ldots\wedge a_{i_k}\wedge a_n\right)\right]^{(-1)^{k-1}}\right)^{-1}\cdot \tag{0.4}$$

$$\cdot\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left[\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n-1}\varphi\left(a_{i_1}\wedge\ldots\wedge a_{i_k}\right)\right]^{(-1)^{k-1}}\right)\varphi(a_n). \tag{0.5}$$

Zauważmy, że cały iloczyn da się scalić do jednego, końcowego:

$$\varphi(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = \prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}\varphi\left(a_{i_1}\wedge\ldots\wedge a_{i_k}\right)\right]^{(-1)^{k-1}},$$

jako że pierwszy czynnik zawiera wszystkie wyrażenia zawierające a_n (poza samym $\varphi(a_n)$), natomiast drugi – wszystkie wyrażenia bez a_n. Na mocy zasady indukcji twierdzenie pozostaje udowodnione dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. □

Mateusz Szymański

[O bazie Hamela]

Omawiając na algebrze liniowej pojęcie przestrzeni liniowej, spotkaliście się zapewne z fundamentalnym pojęciem, jakim jest pojęcie bazy tej przestrzeni. Przytoczmy jej definicję: to podzbiór przestrzeni liniowej V, który jest liniowo niezależny i generuje przestrzeń V. Za jego pomocą każdy wektor $\alpha \in V$ można w jednoznaczny sposób przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazowych.

Zakładając pewnik wyboru, za pomocą lematu Kuratowskiego–Zorna dowodzi się, że dla każdej przestrzeni liniowej istnieje jej baza. Dzięki temu wiemy, że istnieje baza przestrzeni liczb rzeczywistych jako przestrzeń liniową nad ciałem liczb wymiernych. Bazę tę nazywamy *bazą Hamela*.

W niniejszym artykule odpowiemy na następujące pytanie: Czy istnieje baza Hamela H, która jest domknięta na iloczyny? Okazuje się, że odpowiedź zarówno na zadane pytanie, jak i analogiczne w przypadku ogólniejszym, tzn. gdy rozpatrujemy bazę Hamela dla dowolnego ciała F nad jego właściwym podciałem P, jest negatywna.

Najpierw zajmiemy się dowodem tego faktu w przypadku standardowym, gdy bazę Hamela rozpatrujemy jako bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Będzie on przeprowadzany metodą nie wprost.

Załóżmy, że istnieje taka baza Hamela H, że

$$h_1 h_2 \in H \text{ dla każdych } h_1, h_2 \in H.$$

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją addytywną, że

$$f(h) = 1 \text{ dla każdego } h \in H.$$

Dzięki jej własnościom uzyskamy sprzeczność z przyjętym założeniem. Z definicji bazy Hamela wiemy, że każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$ możemy w jednoznaczny sposób przedstawić jako kombinację liniową elementów bazowych. Niech $x, y \in H$. Wówczas

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

$$y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}$ oraz $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m \in H$. Stąd, rozpisując skrupulatnie iloczyn sum, otrzymujemy:

$$x \cdot y = a_1b_1x_1y_1 + a_1b_2x_1y_2 + \ldots + a_1b_mx_1y_m + a_2b_1x_2y_1 + a_2b_2x_2y_2 + \\ + \ldots + a_2b_mx_2y_m + \ldots + a_nb_1x_ny_1 + a_nb_2x_ny_2 + \ldots + a_nb_mx_ny_m.$$

Korzystając z poniższej własności funkcji addytywnej

$$f(ax) = af(x), \quad \text{dla } a \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$$

oraz naszego założenia, otrzymujemy, że

$$f(xy) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_m,\ \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Z drugiej strony mamy

$$f(x)f(y) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_m).$$

To implikuje, że nasza funkcja addytywna f spełnia również następujące równanie

$$f(xy) = f(x)f(y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Okazuje się, że jedynymi funkcjami addytywno-multiplikatywnymi spełniającymi powyższą równość są funkcje* $f \equiv 0$ oraz $f = x$. A to jest sprzeczne z założeniem, że

$$f(h) = 1 \text{ dla każdego } h \in H.$$

Zatem nie istnieje baza Hamela $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$, która jest zamknięta na branie iloczynów.□

Przejdziemy teraz do dowodu ogólniejszego przypadku, w którym bazę Hamela określamy dla dowolnego ciała F nad jego właściwym podciałem P. W dowodzie tym będziemy korzystali z kilku faktów, które są prawdziwe pod założeniem istnienia bazy Hamela zamkniętej na branie iloczynów. Lematy te charakteryzują elementy takowej bazy. Ich dowody możecie znaleźć w [2].

Lemat 1. Niech $h_i, k_j \in H, h_i \neq h_j$ dla $i \neq j$ oraz $p_i, r_j \in P$ będą takie, że

$$\sum_{i=1}^{n} p_i h_i = \sum_{j=1}^{m} r_j k_j,$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N}, , p_i \neq 0$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas dla każdego $h_i \in H$, $i \in \{1, 2, \ldots n\}$

$$h_i = k_j \text{ dla } j \in \{1, 2, \ldots m\}.$$

Lemat 2. Jeżeli $h \in H$ oraz $k \in H$, wówczas

$$\frac{h}{k} \in H.$$

*Dowód tego faktu znajdziecie w [2].

Wniosek. Podstawiając $k = h$ w lemacie 2, mamy

$$1 \in H.$$

Lemat 3. Niech $h \in H$. Jeżeli istnieje takie $n \in \mathbb{Z}$ że $h^n = 1$, to wówczas $h = 1$.

Lemat 4. Niech $h, k \in H$ i $n \neq 0$. Jeżeli

$$h^n = k^n,$$

to

$$h = k.$$

Przejdźmy teraz do naszego dowodu. Wykażemy, że nie istnieje baza Hamela określona dla dowolnego ciała F nad jego właściwym podciałem P, która jest zamknięta na branie iloczynów. Dowód ten będzie przeprowadzony za pomocą indukcji oraz nie wprost.

Załóżmy, że istnieje taka baza Hamela H, że

$$h_1 h_2 \in H \text{ dla każdych } h_1, h_2 \in H.$$

Niech $k_1, k_2 \in H$, $k_1 \neq k_2$. Zauważmy, że $k_1 + k_2 \neq 0$. Zapiszmy element

$$\frac{1}{k_1 + k_2}$$

jako kombinację liniową wektorów bazowych

$$\frac{1}{k_1 + k_2} = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i, \text{ gdzie } p_i \in P, \ h_i \in H.$$

Wówczas

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i k_1 + \sum_{i=1}^{n} p_i h_i k_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i^{'} + \sum_{i=1}^{n} p_i h_i^{''}, \tag{0.6}$$

gdzie $h_i^{'} = k_1 h_i \in H$, $h_i^{''} = k_2 h_i \in H$.

Z lematu 1 wiemy, że $h_i' = 1$ lub $h_i'' = 1$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots n\}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $h_1^{'} = 1$.

Niech $n = 1$. Wówczas równanie (0.6) przyjmuje następującą postać:

$$1 = h_1^{'} p_1 + p_1 h_1^{''}.$$

Ponieważ $h_1^{'} \neq h_1^{''}$, z jednej strony współczynnik stojący zarówno przy wyrazie $h_1^{'}$ oraz $h_1^{''} - p_1$ jest równy 1, zaś z drugiej strony $p_1 = 0$. To prowadzi w oczywisty sposób do sprzeczności. Zanim przejdziemy do sprawdzenia równania (0.6) dla $n = 2$, zapiszemy je w następującej postaci:

$$(1 - p_1)h_1^{'} + \sum_{i=2}^{n} -p_i h_i^{'} = \sum_{j=1}^{n} p_j h_j^{''}. \tag{0.7}$$

Zauważmy, że z lematu 1 wynika, że każdy wektor $h_i^{'}$ jest równy dokładnie jednemu wektorowi $h_j^{''}$. (Zwróćmy uwagę, że współczynnik $1 - p_1$ nie jest równy zeru. Gdyby tak nie było, to z zasady szufladkowej dwóm różnym elementom $h_j^{''}$ zostałby przyporządkowany element $h_i^{'}$, co wówczas oznaczałoby równość z każdym innym elementem $h_i^{'}$, a to jest niemożliwe).
Połóżmy więc

$$h_i^{'} = h_j^{''} \text{ dla każdego } i \in \{1, 2, \ldots n\}.$$

Podstawiając do postaci na wektory $h_i^{'}$ oraz $h_j^{'}$, mamy

$$k_1 h_i = k_2 h_j.$$

Stąd

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{h_j}{h_i}. \tag{0.8}$$

Teraz weźmy w równaniu (0.7) $n = 2$. Jest niemożliwe, aby zachodziło

$$h_1^{'} = h_1^{''},$$

ponieważ wtedy $k_1 = k_2$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że $k_1 \neq k_2$. Weźmy więc $h_1^{'} = h_j^{''}$ dla $j > 1$. Niech $h_1^{'} = h_2^{''}$. Dla $j = 1$ załóżmy, że $h_2^{'} = h_1^{''}$. Wtedy, korzystając z (0.8), mamy

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{h_2}{h_1} \quad \text{i} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Stąd

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{h_2}{h_1}\frac{h_1}{h_2} = 1,$$

więc

$$(k_1)^2 = (k_2)^2.$$

Ale wówczas $k_1 = k_2$, co daje ponownie sprzeczność z wyborem k_1 i k_2.

Pokazuje to, że dla $n = 1, 2$ nie możemy zapisać elementu

$$\frac{1}{k_1 + k_2} \in H$$

jako kombinacji liniowej wektorów z bazy Hamela H. Niech $N \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że dla $n > N$ również nie jest to możliwe. Załóżmy, że

$$h_1^{'} = h_2^{''},\ h_2^{'} = h_3^{''}, \ldots,\ h_N^{'} = h_{N+1}^{''}.$$

Możemy tak zrobić na mocy lematu 1 (w ten sam sposób postępowaliśmy w przypadku gdy $n = 1, 2$).

Teraz, zakładając możliwość, że

$$h_{N+1}^{'} = h_1^{''},$$

oraz wykorzystując równanie (0.8), otrzymujemy następujące równości:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = \ldots = \frac{h_{N+1}}{h_N} = \frac{h_1}{h_{N+1}}.$$

Stąd

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{N+1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \cdot \left(\frac{h_3}{h_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{h_{N+1}}{h_N}\right) \cdot \left(\frac{h_1}{h_{N+1}}\right) = 1,$$

i

$$k_1^{N+1} = k_2^{N+1},$$

więc $k_1 = k_2$, co daje sprzeczność z wyborem elementów k_1 i k_2. To pokazuje, że

$$h_{N+1}^{'} \neq h_i^{''},\ \text{dla } i < N+1,$$

więc

$$h_{N+1}^{'} = h_i^{''},\ \text{dla } i > N+1.$$

Jeżeli bowiem

$$i = N + 1,$$

to wtedy ponownie otrzymujemy, że $k_1 = k_2$. To oznacza, że dla $n > N + 1$ nie jest możliwe zapisanie elementu

$$\frac{1}{k_1 + k_2} \in H$$

jako kombinacji linowej wektorów z bazy H. A więc indukcyjnie także dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

W ten sposób udowodniliśmy, że nie istnieje baza Hamela, która byłaby zamknięta na branie iloczynów, nawet w ogólnym przypadku. Okazuje się, że zachodzi słabsze twierdzenie dotyczące bazy Hamela. Mówi ono, że istnieje taka baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$, że dla każdego $h \in H$ i $n \in \mathbb{Z} : h^n \in H$. Dowód tego faktu można znaleźć w [3].

Literatura

[1] Józef Banaś, Krzysztof Frączek, Leszek Olszowy, *Wybrane własności bazy Hamela I.* Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie, 11(1993), 40–43.

[2] Richard D. Mabry, *No nontrivial Hamel basis is closed under multiplication.* Aequationes Mathematicae 71(2006), 294–299.

[3] Jaroslav Smítal, *On a problem of Aczél and Erdös concerning Hamel basis.* Aequationes Mathematicae 28(1985), 135–137.

Martyna Biskup

[O wewnętrznej stopie zwrotu]

W dzisiejszych czasach istotą działania firm jest rozwój i osiągnięcie zysku. Dążąc do nich, przedsiębiorstwa podejmują aktywność inwestycyjną, która obarczona jest pewnym ryzykiem. Z tego powodu analitycy na całym świecie poszukują efektywnych sposobów oceny opłacalności inwestycji. Jednym z narzędzi, które wymyślono, jest wewnętrzna stopa zwrotu, którą powszechnie oznacza się skrótem *IRR*. Interpretacja wewnętrznej stopy zwrotu jest bardzo prosta. Im większa jej wartość, tym większy odnotujemy dochód z inwestycji. W poniższym artykule powiemy sobie czym właściwie jest *IRR*, kiedy istnieje i czy zawsze możemy z niej skorzystać. Ponadto udowodnimy dwa twierdzenia dotyczące wielomianów rzeczywistych, które ułatwią nam rozważenie powyższych zagadnień.

Wprowadźmy najpierw niezbędne definicje odnoszące się do *IRR*.

Definicja 1. *Przepływy pieniężne* są to kwoty pieniędzy wpłacane/wypłacane regularnie, w pewnych odstępach czasu, np. co rok.

Dodatni przepływ oznacza dochód inwestora, a ujemny – jego nakład.

Jeśli w tym samym momencie występują i nakład, i dochód, to przez przepływ będziemy rozumieli sumę tych dwóch wielkości.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $n + 1$ – liczba wszystkich przepływów, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- t_j – moment wystąpienia j-tego przepływu, $j = 0, 1, \ldots, n$, przy czym $t_0 = 0$,
- C_j – przepływ w momencie t_j.

Definicja 2. *Inwestycją finansową* nazywamy skończony ciąg przepływów $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ o następujących własnościach:

- $C_0 < 0$,
- $C_n \neq 0$,
- $C_j > 0$ przynajmniej dla jednego $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definicja 3. *Wewnętrzną stopą zwrotu z inwestycji – IRR* (ang. *Internal Rate of Return*) nazywamy taką stopę zwrotu r, dla której spełniony jest warunek
$$\sum_{j=0}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j} = 0.$$
Przez stopę zwrotu rozumiemy tu wyrażony procentowo zysk lub stratę z inwestycji w stosunku do początkowego nakładu.

Od tego momentu *IRR* będziemy oznaczać literą r i będziemy traktować jako rozwiązanie powyższego równania.

Zdefiniujmy teraz zmienną pomocniczą x wzorem $x = (1 + r)^{-1}$.

Równanie
$$\sum_{j=0}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j} = 0$$
przyjmuje wówczas następującą postać:
$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n = 0.$$

Widzimy więc, że rozważanie problemu istnienia i jednoznaczności wewnętrznej stopy zwrotu sprowadza się do analizy rozwiązań równania wielomianowego.
Warto zwrócić uwagę na to, iż inwestycja może nie mieć *IRR* (nietrudno wskazać przykład równania wielomianowego, które nie ma rozwiązań) lub może ich mieć wiele (rozwiązanie równania to nie jedna liczba, lecz kilka). W tego typu przypadku metoda *IRR* zawodzi i należy skorzystać z innych sposobów analizy inwestycji.

Zastanówmy się, kiedy równanie $C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. W tym celu rozważmy najpierw dwa interesujące twierdzenia, mówiące o liczbie pierwiastków rzeczywistych wielomianu w ustalonym przedziale.

Twierdzenie 5 (Fouriera)**.** Jeżeli wielomian W stopnia n o rzeczywistych współczynnikach nie zeruje się na końcach przedziału $[a,b]$, gdzie $a<b$, to liczba jego pierwiastków rzeczywistych w tym przedziale (z uwzględnieniem krotności) równa jest $Z(a)-Z(b)-m$, gdzie $Z(c)$ oznacza liczbę zmian znaku w ciągu $W(c), W'(c), W''(c), \ldots, W^{(n)}(c)$, a m jest pewną liczbą parzystą nieujemną.

Dowód. Rozważmy zbiór $A = \{c \in [a,b] : \exists_{0 \leqslant i \leqslant n} W^{(i)}(c) = 0\}$, gdzie $W^{(0)} = W$, zaś $W^{(i)}$ oznacza i-tą pochodną wielomianu W.

Oczywiście A jest zbiorem skończonym.

Niech $A = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, gdzie $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$.

Dla każdego $k \in \{1, \ldots, m\}$ wybierzemy przedział $[a_k, a_k'] \subseteq [a,b]$ tak, aby były spełnione następujące warunki:

1. Przedziały $[a_1, a_1'], \ldots, [a_m, a_m']$ są parami rozłączne.
2. Każdy element c_k należy do dokładnie jednego przedziału $[a_k, a_k']$ (tzn. nie należy do żadnego innego przedziału $[a_p, a_p']$, gdzie $k \neq p$).

Zauważmy, że tak określony ciąg przedziałów ma następujące własności:

I) W przedziale $[a_k', a_{k+1}]$, dla $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, żaden z wielomianów $W, W', \ldots, W^{(n)}$ nie ma pierwiastka.

II) Jeśli c_k jest s-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W^{(j+1)}$, a nie jest pierwiastkiem wielomianu $W^{(j)}$, czyli

$$W^{(j+i)}(c_k) = 0 \quad \text{dla } i = 1, \ldots, s$$

oraz

$$W^{(j)}(c_k) \neq 0 \neq W^{(j+s+1)}(c_k),$$

to wielomian $W^{(j)}$ przyjmuje w przedziale $[a_k, a'_k]$ stały znak. Podobnie wielomian $W^{(j+s+1)}$ w przedziale $[a_k, a'_k]$ jest stałego znaku. W przeciwnym razie przedział ten zawierałby jeszcze co najmniej jeden element ze zbioru A.

III) Jeżeli c_k jest s-krotnym pierwiastkiem wielomianu W, co oznacza, że $W(c_k) = W'(c_k) = \ldots = W^{(s-1)}(c_k) = 0$ oraz $W^{(s)}(c_k) \neq 0$, to $W^{(s)}$ przyjmuje w przedziale $[a_k, a'_k]$ stały znak (gdyż w przeciwnym razie przedział ten musiałby zawierać pierwiastek wielomianu $W^{(s)}$).

Zauważmy, że $Z(a'_k) = Z(a_{k+1})$, gdyż w przedziale $[a'_k, a_{k+1}]$ żaden wielomian $W, W', \ldots, W^{(n)}$ nie ma pierwiastka, więc znaki liczb $W^{(i)}(a'_k)$ oraz $W^{(i)}(a_{k+1})$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ są takie same.

Obliczymy teraz wartości $Z(a_k) - Z(a'_k)$.

A) Rozważmy przypadek, w którym c_k jest s-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W^{(j+1)}$, a nie jest pierwiastkiem wielomianu $W^{(j)}$.

1° $W^{(j+s+1)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$.

Ponieważ $W^{(j+s+1)}$ jest pochodną wielomianu $W^{(j+s)}$, ten ostatni jest funkcją rosnącą w przedziale $[a_k, a'_k]$.

Jak wiemy $W^{(j+s)}(c_k) = 0$. Zatem $W^{(j+s)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, c_k)$
oraz $W^{(j+s)}(x) > 0$ dla $x \in (c_k, a'_k]$.

Ponieważ $W^{(j+s)}$ jest pochodną wielomianu $W^{(j+s-1)}$, ten ostatni na mocy powyższych nierówności jest funkcją malejącą w przedziale $[a_k, c_k)$ oraz funkcją rosnącą w przedziale $(c_k, a'_k]$.

Jak wiemy $W^{(j+s-1)}(c_k) = 0$. Zatem $W^{(j+s-1)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, c_k)$
oraz $W^{(j+s-1)}(x) > 0$ dla $x \in (c_k, a'_k]$.

Rozumując dalej analogicznie, uzyskujemy kolejno informacje o znakach wielomianów $W^{(j+s+1)}, W^{(j+s)}, W^{(j+s-1)}, \ldots, W^{(j+1)}$ w przedziałach $[a_k, c_k)$ oraz $(c_k, a'_k]$, które umieszczamy w tabelach, w zależności od s oraz przy ustalonym znaku $W^{(j)}$ w przedziale $[a_k, a'_k]$:

a) gdy s jest liczbą parzystą oraz $W^{(j)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$+$	$+$	$+$
$W^{(j+1)}$	$+$	0	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$+$	0	$+$
$W^{(j+s)}$	$-$	0	$+$
$W^{(j+s+1)}$	$+$	$+$	$+$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

b) gdy s jest liczbą parzystą oraz $W^{(j)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$-$	$-$	$-$
$W^{(j+1)}$	$+$	0	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$+$	0	$+$
$W^{(j+s)}$	$-$	0	$+$
$W^{(j+s+1)}$	$+$	$+$	$+$

Mamy $Z(a_k) = s + 1$ oraz $Z(a'_k) = 1$.

c) gdy s jest liczbą nieparzystą oraz $W^{(j)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$+$	$+$	$+$
$W^{(j+1)}$	$-$	0	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$+$	0	$+$
$W^{(j+s)}$	$-$	0	$+$
$W^{(j+s+1)}$	$+$	$+$	$+$

Mamy $Z(a_k) = s + 1$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

d) gdy s jest liczbą nieparzystą oraz $W^{(j)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$-$	$-$	$-$
$W^{(j+1)}$	$-$	0	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$+$	0	$+$
$W^{(j+s)}$	$-$	0	$+$
$W^{(j+s+1)}$	$+$	$+$	$+$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 1$.

2° $W^{(j+s+1)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$.

Ponieważ $W^{(j+s+1)}$ jest pochodną wielomianu $W^{(j+s)}$, ten ostatni jest funkcją malejącą w przedziale $[a_k, a'_k]$.

Jak wiemy $W^{(j+s)}(c_k) = 0$. Zatem $W^{(j+s)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, c_k)$ oraz $W^{(j+s)}(x) < 0$ dla $x \in (c_k, a'_k]$.

Ponieważ $W^{(j+s)}$ jest pochodną wielomianu $W^{(j+s-1)}$, ten ostatni na mocy powyższych nierówności jest funkcją rosnącą w przedziale $[a_k, c_k)$ oraz funkcją malejącą w przedziale $(c_k, a'_k]$.

Jak wiemy $W^{(j+s-1)}(c_k) = 0$. Zatem $W^{(j+s-1)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, c_k)$ oraz $W^{(j+s-1)}(x) < 0$ dla $x \in (c_k, a'_k]$.

Rozumując dalej analogicznie, uzyskujemy kolejno informacje o znakach wielomianów $W^{(j+s+1)}, W^{(j+s)}, W^{(j+s-1)}, \ldots, W^{(j+1)}$ w przedziałach $[a_k, c_k)$

oraz $(c_k, a'_k]$, które ponownie umieszczamy w tabelach, w zależności od s oraz przy ustalonym znaku $W^{(j)}$ w przedziale $[a_k, a'_k]$:

a) gdy s jest liczbą parzystą oraz $W^{(j)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$+$	$+$	$+$
$W^{(j+1)}$	$-$	0	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$-$	0	$-$
$W^{(j+s)}$	$+$	0	$-$
$W^{(j+s+1)}$	$-$	$-$	$-$

Mamy $Z(a_k) = s + 1$ oraz $Z(a'_k) = 1$.

b) gdy s jest liczbą parzystą oraz $W^{(j)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$-$	$-$	$-$
$W^{(j+1)}$	$-$	0	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$-$	0	$-$
$W^{(j+s)}$	$+$	0	$-$
$W^{(j+s+1)}$	$-$	$-$	$-$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

c) gdy s jest liczbą nieparzystą oraz $W^{(j)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$+$	$+$	$+$
$W^{(j+1)}$	$+$	0	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$-$	0	$-$
$W^{(j+s)}$	$+$	0	$-$
$W^{(j+s+1)}$	$-$	$-$	$-$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 1$.

d) gdy s jest liczbą nieparzystą oraz $W^{(j)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$:

	a_k	c_k	a'_k
$W^{(j)}$	$-$	$-$	$-$
$W^{(j+1)}$	$+$	0	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(j+s-1)}$	$-$	0	$-$
$W^{(j+s)}$	$+$	0	$-$
$W^{(j+s+1)}$	$-$	$-$	$-$

Mamy $Z(a_k) = s + 1$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

Zatem $Z(a_k) - Z(a'_k) = \begin{cases} s+1 \text{ lub } s-1 & \text{dla s nieparzystych} \\ s & \text{dla s parzystych} \end{cases}$.

W każdym więc przypadku $Z(a_k) - Z(a'_k)$ jest liczbą parzystą dodatnią.

B) Rozważmy teraz przypadek, w którym c_k jest s-krotnym pierwiastkiem wielomianu W.

1° $W^{(s)}(x) > 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$.

Postępując podobnie jak w części A dowodu, ustalamy kolejno znaki wielomianów $W^{(s)}, W^{(s-1)}, \ldots, W', W$ w przedziałach $[a_k, c_k)$ oraz $(c_k, a'_k]$ i otrzymujemy:

a) gdy s jest liczbą parzystą:

	a_k	c_k	a'_k
W	$-$	0	$+$
W'	$+$	0	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(s-2)}$	$+$	0	$+$
$W^{(s-1)}$	$-$	0	$+$
$W^{(s)}$	$+$	$+$	$+$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

b) gdy s jest liczbą nieparzystą:

	a_k	c_k	a'_k
W	$+$	0	$+$
W'	$-$	0	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(s-2)}$	$+$	0	$+$
$W^{(s-1)}$	$-$	0	$+$
$W^{(s)}$	$+$	$+$	$+$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

2° $W^{(s)}(x) < 0$ dla $x \in [a_k, a'_k]$.

a) gdy s jest liczbą parzystą:

	a_k	c_k	a'_k
W	$-$	0	$-$
W'	$+$	0	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(s-2)}$	$-$	0	$-$
$W^{(s-1)}$	$+$	0	$-$
$W^{(s)}$	$-$	$-$	$-$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

b) gdy s jest liczbą nieparzystą:

	a_k	c_k	a'_k
W	$+$	0	$-$
W'	$-$	0	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(s-2)}$	$-$	0	$-$
$W^{(s-1)}$	$+$	0	$-$
$W^{(s)}$	$-$	$-$	$-$

Mamy $Z(a_k) = s$ oraz $Z(a'_k) = 0$.

W każdym z przypadków $Z(a_k) - Z(a'_k) = s - 0 = s$.

Zauważmy teraz, że
$Z(a) - Z(b) = (Z(a) - Z(a_1)) + (Z(a_1) - Z(a'_1)) + (Z(a'_1) - Z(a_2)) +$
$(Z(a_2) - Z(a'_2)) + ... + (Z(a_m) - Z(a'_m) + (Z(a'_m) - Z(b)) =$
$= Z(a) - Z(a_1) + \sum_{k=1}^{m} (Z(a_k) - Z(a'_k)) + \sum_{k=1}^{m-1} ((Z(a'_k) - Z(a_{k+1})) + Z(a'_m) - Z(b)$.

Pozostaje zauważyć, że $Z(a) = Z(a_1)$ oraz $Z(a_m) = Z(b)$, gdyż w przedziałach $[a, a_1]$, $[a'_m, b]$ żaden z wielomianów $W, W', \ldots, W^{(n)}$ nie ma pierwiastka.

Zatem $Z(a) - Z(b)$ jest równe liczbie pierwiastków wielomianu W w przedziale (a, b) z uwzględnieniem krotności, powiększonej o pewną liczbę parzystą nieujemną. □

Twierdzenie 6 (Kartezjusza)**.** Liczba rzeczywistych, dodatnich pierwiastków (z uwzględnieniem krotności) wielomianu $W(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0, ..., a_n$ są liczbami rzeczywistymi oraz $a_0 a_n \neq 0$, równa jest liczbie zmian znaku w ciągu $(a_0, a_1, ..., a_n)$ zmniejszonej o pewną liczbę parzystą nieujemną.

Dowód. Niech $Z(c)$ oznacza liczbę zmian znaku w ciągu

$$W(c), W'(c), W''(c), \ldots, W^{(n)}(c).$$

Oznaczmy przez N tak dużą liczbę dodatnią, że w przedziale $[N, \infty)$ nie zeruje się żaden z wielomianów $W, W', W'', \ldots, W^{(n)}$.

Stosując twierdzenie Fouriera dla przedziału $[0, N]$, otrzymujemy następujące ciągi znaków w końcach tego przedziału:

	0	N
W	$sgn a_0$	$sgn a_n$
W'	$sgn a_1$	$sgn a_n$
W''	$sgn a_2$	$sgn a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$W^{(n)}$	$sgn a_n$	$sgn a_n$

Zatem $Z(N) = 0$ oraz $Z(0)$ jest równe liczbie zmian znaku w ciągu współczynników $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Jak wiemy z twierdzenia Fouriera, liczba pierwiastków w przedziale $[0, N]$ jest równa $Z(0) - Z(N) - m = Z(0) - m$, gdzie m jest liczbą parzystą nieujemną, co daje tezę. □

Spójrzmy teraz na kolejne dwa twierdzenia, nawiązujące już do omawianego tematu, a więc do istnienia i jednoznaczności *IRR* (rozwiązań równania wielomianowego):

Twierdzenie 7. Jeżeli inwestycja jest opisana ciągiem przepływów C_j, gdzie $j = 0, \ldots, n$, w którym znak wyrazów ciągu zmienia się dokładnie jeden raz, to istnieje dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie równania

$$C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0 = 0.$$

Dowód. Niech $C_j, j = 0, \ldots, n$ będzie ciągiem przepływów, w którym znak wyrazów zmienia się dokładnie jeden raz.

Niech ponadto $C(x) = C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0$.

Na mocy twierdzenia Kartezjusza istnieje co najwyżej jedno dodatnie rozwiązanie równania $C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0 = 0$.

Zauważmy, że $C(0) = C_0 < 0$.

Skoro w ciągu niezerowych współczynników $C_j, j = 0, \ldots, n$, znak wyrazów ciągu zmienia się dokładnie jeden raz, to dla odpowiednio dużej wartości argumentu x wielomian musi osiągnąć wartość dodatnią. □

Twierdzenie 8. Warunkiem wystarczającym na to, aby dla inwestycji opisanej ciągiem przepływów C_j, gdzie $j = 0, \ldots, n$, istniało $x \in (0, 1)$ będące rozwiązaniem równania $C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0 = 0$, jest spełnienie nierówności

$$-\sum_{j:C_j<0} C_j < \sum_{j:C_j>0} C_j.$$

Dowód. Niech

$$f(x) = -C_0 - \sum_{\substack{j:C_j<0 \\ j\geqslant 1}} C_j x^j,$$

$$g(x) = \sum_{j:C_j>0} C_j x^j.$$

Mamy

$$f(0) = -C_0 > 0, \;\; f(1) = -\sum_{j: C_j < 0} C_j$$

oraz

$$g(0) = 0, \;\; g(1) = \sum_{j: C_j > 0} C_j.$$

Obie funkcje są ciągłe.

Mają miejsce następujące nierówności: $f(0) > g(0)$ oraz $f(1) < g(1)$.

Zatem dla przynajmniej jednej wartości $x \in (0, 1)$ zachodzi $f(x) = g(x)$.

Z powyższego wnosimy, że równanie $C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0 = 0$ ma w tym przedziale rozwiązanie. $\square$

Podsumowując, wyznaczanie wewnętrznej stopy zwrotu z inwestycji sprowadziliśmy do poszukiwania rozwiązań równania wielomianowego. Posiłkując się w dowodzie twierdzeniem Kartezjusza, pokazaliśmy, że takie rozwiązanie istnieje, gdy znak ciągu współczynników tego wielomianu zmienia się dokładnie jeden raz. Z wiedzą, że rozwiązanie istnieje, możemy próbować go wyznaczyć, jednak zazwyczaj nie jest to łatwe zadanie. Z tego powodu poszukujemy rozwiązań przybliżonych, stosując np. metodę stycznych.

Bibliografia

[1] M. Podgórska, J. Klimkowska, *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005, str. 238, 247-254.

[2] J. Browkin, *Wybrane zagadnienia algebry*, Wyd. drugie poprawione, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1968, str. 197-200.

Grzegorz Heller

[Redakcja [Macierzatora] zaprasza do współpracy!]

[Macierzator] to gazetka wydawana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Piszemy o tym, co nas ciekawi, zastanawia. To miejsce, w którym można opublikować pierwsze pomysły matematyczne, recenzje, eseje. Piszemy o różnych rzeczach:

- przedstawiamy nasze pierwsze drobne matematyczne pomysły;
- opisujemy szczególnie ciekawe naszym zdaniem zagadnienia matematyczne;
- przedstawiamy wyjątkowe zadania z matematycznych konkursów i olimpiad;
- recenzujemy popularnonaukowe książki z matematyki;
- przypominamy postaci słynnych matematyków;
- ... i nie tylko.

Wpadłeś na ciekawy matematyczny pomysł i chcesz podzielić się nim ze światem? Przeczytałeś coś interesującego? A może masz jeszcze inny pomysł na artykuł? Napisz do [Macierzatora]! Wpadnij do pokoju 524 w IM UŚ, aby omówić szczegóły, albo do nas napisz (np. na adres joanna@knm.katowice.pl). Zapraszamy!

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelny: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Martyna Biskup,
Wojciech Bury, Grzegorz Heller, Mateusz Szymański
Skład i łamanie w LaTeX: Joanna Zwierzyńska

Kontakt z redakcją: bezpośrednio w pokoju KNM (p. 524)
lub elektronicznie: macierzator@knm.katowice.pl

Archiwalne numery [MACIERZATORA] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`. Wydanie elektroniczne [MACIERZATORA] ma numer ISSN: 2083-9774.

maj 2016