Wprowadzenie do struktur o-minimalnych

Piotr Pokora

22.02.2009

1 Wprowadzenie do struktur o-minimalnych i pojęcia wstępne

Na początku lat 80-tych Pillay i Steinhorn wprowadzili pojęcie o-minimalności bazując na ideach Lou van den Driesa [1], uogólaniając geometrię semi i subanalityczną.

Definicja 1 : Po przez zbiór semialgebraiczny w $\mathbb{R}^n$ rozumiemy skończoną sumę zbiorów postaci : $f_1(x) = 0$, ... ,$f_k(x) = 0$, $g_1(x) > 0$, ... ,$g_k(x) > 0$, gdzie f_1 , ... , f_k, g_1, ... , $g_k \in \mathbb{R}[x]$. Gdy wielomiany f_1 , ... , f_k, g_1, ... , g_k są stopnia co najwyżej pierwszego, to wtedy mówimy, że zbiór jest semiliniowy. Na płaszczyźnie euklidesowej zbiorami semialgebraicznymi są koło, elipsa, natomiast zbiorami semiliniowymi są kwadrat, prostokąt.

Własności zbiorów semialgebraicznych (rodzina zbiorów semialgebraicznych jest zamknięta na działania sumy, przecięcia oraz dopełnienia). Tworzy algebrę Boole'a.

1. Bardzo ważnym faktem dotyczącym zbiorów semialgebraicznych jest własność rzutowania Tarskiego-Seidenberga: Jeżeli A$\subseteq$ $\mathbb{R}^{n+1}$ i jest zbiorem semialgebriacznym, wtedyπ(A) $\subseteq \mathbb{R}^n$jest zbiorem semialgebraicznym, gdzie π: $\mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem rzutowania na pierwsze n-współrzędnych.

2. Z algebry oprócz znajomości podstawowych pojęć takich jak grupa czy ciało potrzebne będzie potrzebne pojęcie ciała uporządkowanego [2]. Na początku poprzez pierścień uporządkowany (A,$\leqslant$) rozumiemy pierścień A wraz z porządkiem liniowym, który spełnia następujące warunki: 1) z warunku x $\leqslant$ y wynika, że x+z $\leqslant$ y+z, $\forall$ x,y,z$\in$ A ; 2) z warunku 0 $\leqslant$ x i 0 $\leqslant$ y wynika, że 0 $\leqslant$ xy. Zatem poprzez ciało uporządkowane (F,$\leqslant$) rozumiemy ciało, które jako pierścień F jest uporządkowane. Uwaga: Każde ciało uporządkowane ma charakterystykę 0.

3. Pojęcia zbioru semialgebraicznego wypukłego i zwartego są takie same jak poznane na topologii.

2 Definicja struktury o-minimalnej i przykłady.

1): Strukturą o-minimalną na zbiorze $\mathbb{R}$ rozumiemy ciąg (S = S_n, n$\in\mathbb{N}$) taki, że dla każdego n zachodzą następujące aksjomaty:

S 1: S_n jest algebrą Boole'a podzbiorów $\mathbb{R}^n$ taką, że do S_n należy zbiór pusty oraz cała przestrzeń, jeśli A, B $\in S_n$ to wtedy suma mnogościowa należy do S_n , oraz jeśli A $\in S_n$ to $\mathbb{R}^n$ - A $\in S_n$; (S_n jest definiowalne, jeśli A, B są definiowalne to ich suma mnogościowa jest definiowalna oraz różnica $\mathbb{R}^n$ - A jest definiowalna).

S 2: Jeśli A $\in S_n$ to wtedy A$\times\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R}\times$A $\in S_{n+1}$ (Jeśli A jest definiowalne, to iloczyn kartezjański $\mathbb{R}$ i A jest definiowalny).

S 3: $\{(x_1 , \dots , x_n)\in\mathbb{R}^n\colon x_i = x_j\}\in S_n$ dla $1\leqslant i < j\leqslant n$; (Przekątna w $\mathbb{R}^n$ jest definiowalna).

S 4: Dla A $\in S_{n+1} \Rightarrow \pi(A) \in S_n$, gdzie $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ jest zwykłym odwzorowaniem rzutownia ; (Jeśli A jest definiowalny, to π(A) jest również definiowalny).

O_1: $\{r\} \in S_1$ dla r $\in \mathbb{R}$ i $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x < y\} \in S_2$.

O_2: zbiory w S_1 są skończoną sumą przedziałów i punktów.

2): Definicja struktury w sensie teorio-modelowym.

- Niech M będzie zbiorem (uniwersum) struktury. Wtedy po przez strukturę $\mathcal{M}$ rozumiemy pewien układ składający się z funkcji pierwotnych, elemetów stałych i relacji określonych na M.
- Mówimy, że struktura $\mathcal{M}$ jest strukturą o-minimalną, jeżeli jedną z wyróżnionych relacji jest relacja liniowego porządku oraz każdy niepusty podzbiór definiowalny zbioru podkładowego (uniwersum) jest skończoną sumą przedziałów.
- Mówimy, że zbiór Z jest zbiorem definiowalnym, jeżeli $\mathcal{M}^n \supset Z = \{(x_1 , \dots, x_n) : \mathcal{M} \models \Phi(x_1 , \dots , x_n) \}$, gdzie Φ jest dowolną formułą n-arną ; (powyższy zapis czytamy, że wykres formuły jest spełniony w $\mathcal{M}$).

Lemat 1 : Jeżeli funkcja f: (a,b) $\mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją defniowalną, to wtedy jest przedziałami monotoniczna i ciągła. (W sensie ogólnym)

Przykłady struktur o-minimalnych:

- struktury nie posiadające struktury algebraicznej : ($\mathbb{N}$,$\leqslant$, S), ($\mathbb{Z}$,$\leqslant$, S) , ($\mathbb{Q}$,$\leqslant$, S) , ($\mathbb{R}$,$\leqslant$, S), (czytamy S jest strukturą nad odpowiednim zbiorem).
- ciało ($\mathbb{R}$,+,$\circ$), tylko ciała rzeczywiście domknięte mogą być strukturami o-minimalnymi, gdzie $\circ$ "zwykłe" mnożenie.

- grupa z porządkiem ($\mathbb{R}$, $\star$, $\leqslant$).

- przestrzenie wektorowe nad ciałem rzeczywiście domkniętym uporządkowanym ($\mathbb{R}$, $+$, λ, $\leqslant$), gdzie oznaczenie λ oznacza standardowe mnożenie przez skalar. W przypadku przestrzeni wektorowej $\mathbb{F}$ wprowadza się pojęcie uporządkowanej przestrzeni liniowej $\mathbb{F}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ takiej, że zachodzi warunek: dla każdego x $\in \mathbb{F}$ i dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ z warunku, że x $>$ 0 i λ $>$ 0 wynika, że λx $>$ 0 [2].

- Również możemy wprowadzić pojęcie struktury tzw. silnie o-minimalnej, czyli struktury nad liczbami zespolonymi. Wtedy jednak zmienia się definicja o-minimalności O_2: zbiór punktów jest skończony, bądź domknięcie danego zbioru jest skończone.

W tym momencie zostaną przedstawione przykłady różnych zbiorów dla struktury zbiorów semialgebraicznych. I inne ciekawe rzeczy.

3 Pojęcie komórki i rozkładu komórkowego. Wprowadzenie do charakterystki Eulera.

Dla każdego definiowalnego zbioru X w $\mathbb{R}^m$ kładziemy:

- C(X) := $\{f$: X $\mapsto \mathbb{R}$: f jest definiowalna i ciągła$\}$

- C_∞(X) := C(X) $\cup$ $\{-\infty, +\infty\}$

- Dla f, g należących do C_∞(X) takich, że $f < g$ (rozumiane w odpowiedni sposób) kładziemy $(f,g)_X$:=$\{$(x,r) $\in$ X$\times\mathbb{R}$: f(x) $<$ r $<$ g(x) $\}$

Definicja 1 : Niech (i_1 , ... , i_m) będzie ciągiem zer i jedynek o długości m. Komórka - (i_1 , ... , i_m) jest definiowalnym podzbiorem $\mathbb{R}^m$, która jest zadana w sposób indukcyjny:

- Komórka - (0) jest jednoelementowym zbiorem $\{$r$\} \subset \mathbb{R}$ (punkt), komórka - (1) jest przedziałem (a,b) $\subset \mathbb{R}$.

- Przypuśćmy, że komórki - (i_1 , ... , i_m) są zdefiniowane, wtedy komórka - (i_1 , ... , i_m,0) jest wykresem $\Gamma(f)$ funkcji C(X), gdzie X jest komórką - (i_1 , ... , i_m). Dalej komórka - (i_1 , ... , i_m,1) jest zbiorem $(f,g)_X$, gdzie X jest komórką - (i_1 , ... , i_m) i f ,g $\in C_\infty$(x), $f < g$.

W podpunkcie pierwszym komórka może być punktem, bądź przedziałem. W drugim komórka może być wykresem funkcji bądź obaszarem między funkcjami. Więc komórka - (0,0) jest punktem $\{$(a,b)$\} \subset \mathbb{R}^2$, komórka - (0,1) jest jest wykresem ciągłej definiowalnej funkcji na przedziale $\{$a$\}$ $\times$ $\mathbb{R}$, komórka - (1,0) jest wykresem funkcji na przedziale. Przedziałem (kostką) w $\mathbb{R}^m$ jest komórka -(1, .. ,1).

Rozważamy również specjalne przypadki jedno punktowej przestrzeni $\mathbb{R}^0$, ściśle komórka - (), gdzie () jest ciągiem długości 0.

Jeśli A jest komórką $\mathbb{R}^{m+1}$, wtedy π(A) jest komórką w $\mathbb{R}^m$.

Definicja 2 : Rozkładem komórkowym $\mathbb{R}^m$ nazywamy specjalny rodzaj partycji $\mathbb{R}^m$ na skończoną liczbę komórek. Definicja jest indukcyjna ze względu na m:

- rozkład $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ jest postaci {(-∞,a_1) , (a_2,a_3) , (a_4,a_5) ,..., (a_k,∞) , {a_1} , ... , {a_k} }
- rozkładem $\mathbb{R}^{m+1}$ nazywamy skończony podział $\mathbb{R}^{m+1}$ na komórki A takie, że zbiór rzutowań π(A) jest rozkładem komórkowym w $\mathbb{R}^m$, gdzie π zwykłe odwzorowanie rzutowania.

Niech D = {A(1), ... , A(k)} będzie rozkladem $\mathbb{R}^m$; A(i) $\neq$ A(j) dla i$\neq$ j i niech dla każdego i$\in${1 , ... , k} funkcje $f_{i1}<$ ... , $< f_{i\,n(i)}$ należą do C(A_i).

Wtedy D_i={(-∞, f_{i1}), ... , ($f_{i\,n(i)}$, +∞), Γ(f_{i1}), ... , Γ($f_{i\,n(i)}$) }. W tym momencie warto podać przykład.

4 Charakterystyka Eulera

Na początku paragrafu definiujemy wymiar zbioru definiowalnego X $\subset \mathbb{R}^m$ w następujący sposób : dim X := max {i_1 + ... + i_m : X zawiera komórkę-(i_1 , ... , i_m) }.

Kilka uwag dotyczących wymiaru zbioru definiowalnego X:

- gdy X jest zbiorem pustym, wtedy dim X = -∞
- więc dim $X \in$ { -∞, 0, 1, 2, ... , m} oraz dim $X = m$, gdy X zawiera otwartą komórkę. Dzieląc X na skończoną ilość komórek zauważamy, że dim $X = 0$, gdy X jest skończony i niepusty.

Definicja 1 : Charakterystyka Eulera dla komórki C o wymiarze d wyraża się wzorem E(C)= $(-1)^d$.

Definicja 2 : Wzór na charakterystykę Eulera dla zbioru definiowalnego S $\subseteq \mathbb{R}^m$ przy rozkładzie P wyraża się wzorem $E_p(S) = \sum_{c\in p} E(C)$.

Propozycja 1 : Jeżeli P' jest drugim skończonym rozkładem komórkowym S na komórki to wtedy $E_{P'}(S) = E_P(S)$.

Lemat 1 : Jeśli D jest rozkładem komórki C, wtedy $E_D(C) = E(C) = (-1)^{dimC}$.

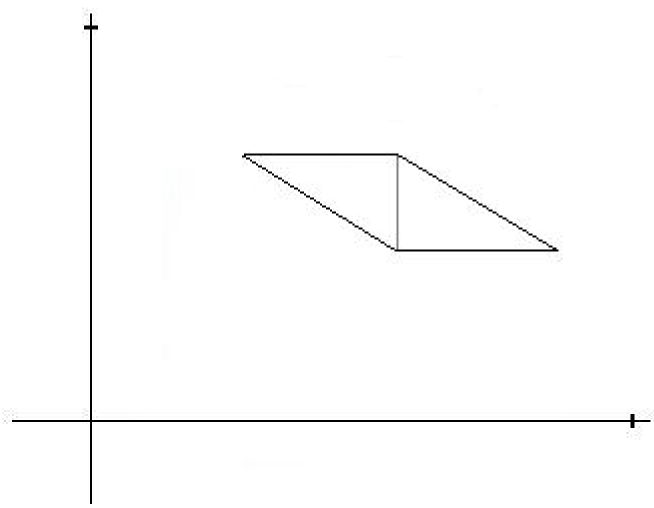
Lemat 2 : Jeśli A $\subseteq \mathbb{R}^m$ jest otwartą komórką oraz f : A $\mapsto \mathbb{R}^n$ i f jest definiowalną iniekcją, wtedy f(A) zawiera otwartą komórkę.

Propozycja 2 :

- Jeżeli X $\subseteq$ Y $\subseteq \mathbb{R}^m$ i X, Y są definiowalne, wtedy dim $X \leqslant$ dim $Y \leqslant$ m.
- Jeżeli X $\subseteq \mathbb{R}^m$, Y $\subseteq \mathbb{R}^n$ są definiowalne i istnieje definiowalna bijekcja między nimi, to dim $X =$ dim Y .
- Jeżeli X i Y mają tą samą charakterystykę Eulera oraz są tego samego wymiaru, to wtedy istnieje definiowalna bijekcja między nimi.
- Jeżeli X, Y $\subseteq \mathbb{R}^m$ są definiowalne, wtedy dim $(X \cup Y) = \max\{$dim X, dim $Y\}$.

Propozycja 3 : Jeżeli f: S $\mapsto \mathbb{R}^n$ jest definiowalnym iniektywnym odwzorowaniem, wtedy E(S) = E(f(S)).

Przykład 2 :



Mamy dany równoległobok. Dzielimy go zgodnie z zasadą, że linia podziału ma być równoległa do OY (szara linia). Dla naszego rombu przy danym podziale charakerystyka Eulera wynosi E_D(A)= 2 $(-1)^2$ + 5 $(-1)^1$ + 4 $(-1)^0$= 1.

Objaśnienie: Mamy 2 komórki wymiaru 2 (2 trójkąty powstałe w wyniku podziału). Mamy 5 krawędzi (odcinków) wymiaru 1 oraz 4 punkty wymiaru 0.

Wnioski:

1. Na charakterystykę Eulera równy wpływ mają komórki wymiaru 0 jak i wymiarów wyższych.
2. Dla definiowalnych zbiorów S_1 , $S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ mamy $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2)$ - $E(S_1 \cap S_2)$; jeśli $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.
3. Charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem topologicznym.
4. W sensie topologicznym jeśli dwa zbiory definiowalne spełaniają Propozycję 2.3, to zbiory te można ze sobą utożsamić.

W powyższym referacie został przedstawiony zaledwie fragment teorii struktur o-minimalnych.

5 Bibliografia

[1] Lou van den Dries, “Tame topology and o-minimal structures”, Cambridge University Press, 1999.

[2] S. Basu, R. Pollack, M-F Roy, “Algorithms in Real Algebraic Geometry”, Springer, 2006