Piotr Idzik 16.04.2009

O nieciągłych rozwiązaniach równania Cauchy'ego

Podamy, w oparciu o równanie Cauchy'ego, konstrukcję funkcji różnowartościowych mających gęsty wykres.

Twierdzenie 1. *Niech* $(L, \mathbb{K}, +, \cdot)$ *oraz* $(M, \mathbb{K}, +, \cdot)$ *będą przestrzeniami liniowymi,* $B \subset L$ *będzie bazą przestrzeni* L *oraz* $\psi\colon B \to M$ *będzie dowolną funkcją. Wtedy istnieje dokładnie jeden homomorfizm* $\varphi\colon L \to M$ *taki, że* $\varphi_{|B} = \psi$.

Dowód. Wiadomo, że dowolny punkt przestrzeni L może być zapisany jako skończona kombinacja liniowa elementów bazy B. Niech $x \in L$ będzie dowolnym punktem. Wtedy:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_i, \qquad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad b_i \in B, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Dla tak wybranego x definiujemy funkcję φ następująco:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \psi(b_i)$$

Oczywiście funkcja jest poprawnie określona dla dowolnych $x \in L$ oraz:

$$\bigwedge_{b \in B} \varphi(b) = \psi(b)$$

Pokażemy, że φ jest homomorfizmem. Ustalmy $x, y \in L$, wtedy x oraz y możemy przedstawić jako[1]:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_i \\ y & = & \sum_{i=0}^{n} \beta_i b_i \end{array} \qquad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}, \quad b_i \in B, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Wtedy:

$$x + y = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) b_i$$

Policzmy:

$$\varphi(x + y) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \psi(b_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \psi(b_i) + \sum_{i=0}^{n} \beta_i \psi(b_i) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Ustalmy dowolne $\lambda \in \mathbb{K}$, policzmy:

$$\varphi(\lambda x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda \alpha_i \psi(b_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \psi(b_i) = \lambda \psi(x)$$

Zatem φ jest homomorfizmem. Do pokazania została jedyność homomorfizmu φ. Przypuśćmy, że istnieje homomorfizm $\delta\colon L \to M$ o rządanych własnościach taki, że $\varphi \neq \delta$. Policzmy dla ustalonego $x \in L$:

$$\delta(x) = \delta\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \delta(\alpha_i b_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \delta(b_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \psi(b_i) = \varphi(x)$$

Sprzeczność. □

[1] gdyby przedstawienia wektorów x i y, w których wszystkie współrzędne są różne od 0 zawierały różne wektory bazowe, to możemy zmienić te reprezentacje tak, aby były złożone z tych samych wektorów bazowych (wtedy niektóre współrzędne będą równe 0)

Definicja 2. *Funkcję* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *nazywamy funkcją addytywną jeśli spełnia równanie Cauchy'ego:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Twierdzenie 3. *Niech* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją addytywną. Wtedy:*

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}^N,\alpha\in\mathbb{Q}} f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Dowód. Niech f spełnia równanie Cauchy'ego. Zauważmy, że biorąc $x = y = 0$ otrzymujemy:

$$f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Weźmy $y = -x$, wtedy:

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = 0 = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

Zatem funkcja f jest nieparzysta. Przyglądając się równaniu Cauchy'ego od razu otrzymujemy, że jeśli f spełnia równanie to:

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

Biorąc $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = x$ otrzymujemy:

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f(nx) = nf(x)$$

Na mocy nieparzystości powyższą równość możemy zapisać dla $n \in \mathbb{Z}$. Ustalmy $\alpha \in \mathbb{Q}$. Niech $p \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}$ będą takie, że $\alpha = \frac{p}{q}$, wtedy $px = q\alpha x$ oraz:

$$pf(x) = f(px) = f(q\alpha x) = qf(\alpha x) \Rightarrow f(\alpha x) = \frac{p}{q} f(x) = \alpha f(x)$$

$\square$

Wniosek 4. Niech $N = 1$, $c = f(1)$, wtedy dla $q \in \mathbb{Q}$ mamy:

$$f(q) = f(q \cdot 1) = qf(1) = cq$$

Jeśli dodatkowo założymy, że f jest funkcją ciągłą, to f ma postać:

$$f(x) = cx, \quad x \in \mathbb{R}$$

Wniosek 5. Każda funkcja addytywna $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jest homomorfizmem przestrzeni $(\mathbb{R}^N, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ w $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$. Dalej jeśli H jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^N, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ (tzw. bazą Hamela), $g\colon H \to \mathbb{R}^N$ dowolną funkcją, to, na mocy twierdzenia 1, funkcję g można jednoznacznie przedłużyć do homomorfizmu tych przestrzeni. Innymi słowy, funkcja g jednoznacznie wyznacza funkcję f.

Twierdzenie 6. *Niech* H *będzie bazą przestrzeni* $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$*,* $g\colon H \to \mathbb{R}$ *dowolną funkcją a* f *jej homomorficznym przedłużeniem. Wówczas* f *jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich* $h \in H$ $\frac{f(h)}{h} = const.$

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech f będzie ciągła. Wtedy na mocy twierdzenia 3 $f(x) = cx$. Stąd dla $h \in H$, mamy $g(h) = f(h) = ch$.

($\Leftarrow$) Niech $g(h) = ch$ dla $h \in H$. Wtedy funkcja cx jest homomorficznym przedłużeniem g, a na mocy twierdzenia 1 jedynym, więc f jest ciągła.

□

Twierdzenie 7. *Niech H będzie bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^N, \mathbb{Q}, +, \cdot)$, $g\colon H \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją taką, że $g \neq 0$ oraz $g(H) \subset \mathbb{Q}$, wtedy jej homomorficzne przedłużenie $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieciągłą.*

Dowód. W dowodzie twierdzenia 1 pokazaliśmy, że jeśli $\mathbb{R}^N \ni x = \sum_{i=0}^n \alpha_i h_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $h_i \in H$, $i = 0, 1, \ldots, n$ to $f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i g(h_i)$. Stąd jeśli niezerowa funkcja g przyjmuje tylko wartości wymierne to również funkcja f je przyjmuje, więc f nie może być ciągła. □

Lemat 8. *Niech $A \subset \mathbb{R}^N$. Zbiór A jest gęsty w $\mathbb{R}^N$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ zbiór $\alpha A = \{\alpha x\colon x \in A\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}^N$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Ustalmy dowolne $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz dowolny zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^N$. Oczywiście zbiór $\frac{1}{\alpha}U$ jest zbiorem otwartym, więc $\frac{1}{\alpha}U \cap A \neq \emptyset$. Niech $x \in \frac{1}{\alpha}U \cap A$. Wtedy $\alpha x \in U \cap \alpha A$. Zatem $U \cap \alpha A \neq \emptyset$

($\Leftarrow$) Zauważmy, że $1A = A$.

□

Twierdzenie 9. *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie nieciągłą funkcją addytywną. Wówczas zbiór:*

$$Gr(f) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x) = y\Big\}$$

jest gęsty w $\mathbb{R}^2$ [2].

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $f(q) = q$ dla $q \in \mathbb{Q}$ (wynika to z lematu 8). Funkcja f jest nieciągła, więc dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ istnije $\delta > 0$, że $f(\alpha) = \alpha + \delta$. Ustaly dowolny punkt $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ oraz $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Niech $\beta = \frac{y-x}{\delta}$. Wtedy $x = y - \beta\delta$. Niech $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ będzie takie, że:

$$|\beta - b| < \frac{r}{3|\delta|}$$

Niech $a \in \mathbb{Q}$ będzie takie, że:

$$|\alpha - a| < \frac{r}{3|b|}$$

Połóżmy:

$$X = x + b(\alpha - a)$$

Wtedy:

$$\begin{aligned}
f(X) &= f(x + b(\alpha - a)) \\
&= f(x) + bf(\alpha) - bf(a) \\
&= x + b(\alpha + \delta) - ba \\
&= y - \beta\delta + b(\alpha + \delta) - ba \\
&= y - \delta(\beta - b) + b(\alpha - a) = Y
\end{aligned}$$

[2] Analogiczne twierdzenie można udowodnić dla $N > 1$

Policzmy:

$$\begin{aligned}
\rho((X,Y),(x,y)) &= \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2} \\
&= \sqrt{(x+b(\alpha-a)-x)^2+(y-\delta(\beta-b)+b(\alpha-a)-y)^2} \\
&= \sqrt{2b^2(\alpha-a)^2+\delta^2(\beta-b)^2-2\delta(\beta-b)b(\alpha-a)} \\
&< \sqrt{\frac{2r^2}{9}+\frac{r^2}{9}+\frac{2r^2}{9}} \\
&< r
\end{aligned}$$

Zatem $(X, f(X)) \in K((x,y),r)$. Stąd $Gr(f)$ jest gęsty w $\mathbb{R}^2$. □

Lemat 10. *Niech $N > 1$. Nie istniej ciągła bijekcja $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje taka funkcja. Ustalmy $x \in \mathbb{R}^N$. Zbiór $\mathbb{R}^N \setminus \{x\}$ jest zbiorem spójnym, natomiast zbiór $f\left(\mathbb{R}^N \setminus \{x\}\right)$ nie jest spójny. Sprzeczność (ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny). □

Twierdzenie 11. *Istnieją nieciągłe i różnowartościowe rozwiązania równania Cauchy'ego.*

Dowód. Rozważmy przypadek $N = 1$. Niech $H \subset \mathbb{R}$ będzie bazą przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$. Niech $h_1, h_2 \in H$ oraz $h_1 \neq h_2$. Niech funkcja $g\colon H \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem [3]:

$$g(h) = \begin{cases} h_2 & , \quad h = h_1 \\ h_1 & , \quad h = h_2 \\ h & , \quad h \in H \setminus \{h_1, h_2\} \end{cases}$$

Na mocy twierdzenia 1 istnieje jednoznaczne homomorficzne przedłużenie funkcji g do funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zauważmy, że zbiór $g(H)$ jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$, stąd $\ker f = \{0\}$, zatem homomorfizm f jest funkcją różnowartościową. Ponadto zauważmy, że funkcja g nie spełnia warunku proporcjonalności, więc na mocy twierdzenia 6 funkcja f jest nieciągła.

Rozważmy przypadek $N > 1$. Niech $H \subset \mathbb{R}^N$ będzie bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^N, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ oraz niech $B \subset \mathbb{R}$ będzie bazą przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$. Zbiory H oraz B mają równą moc (równą continuum), zatem istnieje funkcja różnowartościowa $g\colon H \to B$. Niech funkcja $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie homomorficznym przedłużeniem funkcji g. Zauważmy, że f jest funkcją różnowartościową oraz nieciągłą (na mocy lematu 10). □

Wniosek 12. Istnieją funkcje różnowartościowe mające gęsty wykres.

Literatura

[1] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, PWN, Katowice 1985

[3] Tak naprawdę wystarczy aby funkcja g była dowolną, funkcją nie spełniającą warunku proporcjonalności odwzorowującą w siebie 2 bazy Hamela